

Calcul différentiel,
équations différentielles

Licence 3 Mathématiques, parcours B

François Dahmani

Université Joseph Fourier, Grenoble I

25 juillet 2013

Avant propos

Le but du cours est d'introduire des notions de calcul différentiel, en dimension finie. Le "calcul différentiel" inventé par Leibniz et (ou ?) Newton, pour des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tient essentiellement dans la notion de la dérivation, et de toutes les techniques et applications autour de celle-ci (inégalité des accroissements finis, formule de Taylor, développements limités, études simples de fonctions compliquées, de limites, équations différentielles décrivant un système physique complexe, etc...)

Il s'agit, si l'on y regarde bien, d'approximer des graphes de fonctions compliquées par leur tangentes (approximation par une fonction affine). Cette "linéarisation" de la fonction en un point donné est, on l'a vu, très utile. De même, il n'échappe pas très longtemps que les équations différentielles linéaires sont plus faciles à manipuler, et à comprendre que bon nombre d'équations non linéaires. Le point focal du calcul différentiel est de comprendre, et de se doter des outils pour manipuler des approximations "linéaires" de phénomènes non-linéaires.

Une problématique de ce cours est de passer de la dimension 1 (une variable en entrée, une valeur en sortie) à des dimensions plus grandes, (plusieurs variables en entrée, plusieurs valeurs en sortie), qui correspond souvent à un cadre naturel de problème scientifique.

Le plan est le suivant.

On se propose tout d'abord de considérer les fonctions qui sont toujours d'une seule variable (disons le temps) mais qui sont à valeur dans un espace vectoriel de dimension n , avec $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ étant le cas "classique" des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On peut y penser comme une trajectoire dans \mathbb{R}^n paramétrée par le temps (attention cependant, cette trajectoire n'est pas l'analogue du graphe d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Cette situation est un cadre avantageux pour étudier des équations différentielles linéaires, et certaines non linéaires. C'est aussi un bon cadre pour étudier des courbes paramétrées, par exemples de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

Ensuite, on élargit la perspective aux fonctions \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n , avec $m \geq 2$. Dans ce cas, plus subtil, il faut peut être penser à $m = 2$, et $n = 3$, et aux fonctions comme des paramétrisations de morceaux de surfaces dans \mathbb{R}^3 . La bonne notion de dérivée est alors celle de meilleurs

approximation par une application affine, autour d'un point (et la différentielle est la partie linéaire de cette application, comme la dérivée donnait la pente de la tangente). L'étude des points critiques permet une première ébauche de la recherche d'extremas. Mais il faut savoir d'ériver à l'ordre 2 pour compléter cette étude. Une pièce maitresse de cette théorie est le théorème d'inversion locale, ou des fonctions implicites. Il permet l'étude de paramétrisations de surfaces, par exemple. Comme pour les courbes, l'étude locale des surfaces se fonde sur le calcul différentiel (et se transmute en *géométrie différentielle*). Celle-ci est très riche, et n'est que juste abordée dans ce cours. Signalons que la notion de courbure des surfaces, découverte par Gauss, permet de donner forme à des idées importantes, et étonnantes.

Remarques bibliographiques.

Le cours suit souvent de très près celui proposé par F. Laudenbach [Lau] à l’X (dans une version abrégée et réduite à la dimension finie), sauf en ce qui concerne l’étude locale des courbes, pour laquelle on préfère suivre un chapitre du livre de M. Berger et B. Gostiaux [Ber. Gos.], et en ce qui concerne l’étude des extremas, pour laquelle on se reporte au compte-rendu de X. Gourdon [Gou].

Des exercices nombreux et adaptés (dont, selon toute vraisemblance, une partie sera traité en TD) se trouvent dans [Gou], [Ber. Gos.] (pour l’étude des courbes et des surfaces), et dans le guide de F. Rouvière [Rou].

Nos recommandations bibliographiques vont naturellement vers ces ouvrages.

Calendrier proposé : 28 séances d’1h30, réparties sur 14 semaines. On a essayé de faire en sorte que chaque “sous-section” corresponde à une séance d’1h30 (donc on avance de 2 sous-sections par semaines), mais c’est parfois trop optimiste, donc on réserve plusieurs séances “tampon” réparties.

1ere semaine : 1.1, 1.2 – EDL, Cauchy Lipschitz

2eme semaine : 1.3, 1.4 – Résolvante et variation de la constante.

3eme semaine : 1.5, 1.6 – EDNL

4eme semaine : 1.7, Tampon. – Paramétrisations de courbes.

Vacances de fevrier.

5eme semaine : 1.8, 1.9 – Théorie locale des courbes

6eme semaine : 2.1, 2.2 – Differentielles, dérivées partielles.

Contrôle continu.

7eme semaine : 2.3, 2.4 – Théorie différentielle à l’ordre 2.

8eme semaine : 2.5, Tampon. – Ordre r , et Taylor .

9eme semaine : 2.6, 2.7 – Extremas libres, inversion locale.

10eme semaine : 2.8, Tampon – Fonctions implicites.

11eme semaine : 2.9, Tampon – Extremas liés, Théorie locale des surfaces.

Vacances d'avril.

12eme semaine : 2.10, 2.11 – Théorie locale des surfaces. Courbure de Gauss.

13eme semaine : 2.12, 2.13 – Retours sur les equations différentielles.

14eme semaine : Suite et fin...

Table des matières

1 Fonctions d'une variable réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	9
1.1 Equations différentielles linéaires, le point de vue matriciel	9
1.1.1 Définitions	10
1.1.2 Le problème de l'ordre	11
1.1.3 Cas des coefficients constants, et exponentielle de matrice	12
1.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz, en linéaire	14
1.2.1 Préliminaire : Théorème de point fixe de Picard	14
1.2.2 Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire	15
1.3 La Résolvante	17
1.3.1 Structure de l'espace de solutions	17
1.3.2 Comportement du Wronskien, Théorème de Liouville	19
1.4 Equations non-homogènes	21
1.4.1 Variation de la constante	21
1.4.2 Cas de l'ordre 2, de la dim 2, détails	22
1.5 Equations différentielles non linéaires, le théorème de Cauchy Lipschitz	22
1.5.1 Cauchy Lipschitz non linéaire	23
1.6 Aux bornes de l'intervalle	25
1.6.1 Solutions maximales, explosions	25
1.6.2 Le Lemme de Gronwall	27
1.7 Théorie locale des courbes dans \mathbb{R}^3 , paramétrisations	31
1.7.1 Définitions et chausses trappes	31
1.7.2 Exemples de coordonnées	32
1.7.3 Tangente, abscisse curviligne	34
1.8 Théorie locale des courbes : trièdres de Frenet	37
1.8.1 Courbure(s)	37
1.8.2 Torsion, repere et formules de Frenet	38
1.9 Théorème "fondamental" de la théorie locale des courbes	40
1.9.1 Compléments : théorie locale des points singuliers	42

1.9.2	Compléments : développantes, développées, trajectoires orthogonales...	42
2	Fonctions de plusieurs variables réelles $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	44
2.1	Dériver, ou différentier	44
2.1.1	Différentiabilité, classe \mathcal{C}^1	46
2.2	Dérivées partielles	48
2.2.1	Dérivées partielles, Jacobienne	48
2.2.2	Exemples et contre-exemples usuels	49
2.3	Théorie différentielle	51
2.3.1	Formule de composition	51
2.3.2	Inégalité des accroissements finis et applications	52
2.4	Ordre 2 (et plus)	57
2.4.1	Différentielle et dérivées partielles d'ordre 2	57
2.4.2	Lemme de Schwarz	58
2.5	Généralisation à l'ordre r	62
2.5.1	Différentielle d'ordre r , dérivées partielles d'ordre r	62
2.5.2	Formule de Taylor	63
2.6	Extremas "libres", points critiques, et signe du Hessien $rt - s^2$	65
2.7	Théorème d'inversion locale	67
2.8	Théorème des fonctions implicites	72
2.8.1	Le théorème	72
2.8.2	Ecriture matricielle	73
2.8.3	Lien entre les théorèmes, et interprétation	74
2.9	Extremas liés	75
3	Théorie locale des surfaces régulières dans \mathbb{R}^3	77
3.1	Paramétrisations différentiables	77
3.1.1	Exemples	77
3.1.2	Changement de paramétrisations	78
3.2	Définitions implicites	79
3.2.1	Contexte	79

3.2.2	Exemples	79
3.3	Plan tangent	80
3.3.1	Définition et caractérisations	80
3.3.2	Vecteur normal, gradient, application de Gauss	80
3.4	Retrouver la métrique	81
3.4.1	Longueur de chemins	82
3.4.2	Calculs d'aires de surfaces	82
3.5	Application de Gauss	83
3.5.1	Definition (rappel)	83
3.5.2	Symétrie	83
3.5.3	Courbure normale et principales	83

1 Fonctions d'une variable réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Ou bien d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . "Ce sont des courbes paramétrées"

Remarque : la continuité, et la dérivabilité (et la dérivation) d'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n se passe coordonnée par coordonnée.

1.1 Equations différentielles linéaires, le point de vue matriciel

On sait ce que c'est qu'une EDL d'ordre 1. D'habitude l'inconnue est une fonction d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et l'Equadiff se note

$$y' = a(t)y + b(t)$$

ou encore

$$f(t)y' = a(t)y + b(t)$$

ce qui n'est résolument pas la même chose, vu que dans le second cas, on peut être embêté par les points où f s'annule.

Du point de vue théorique, on se place surtout dans le premier cas, en se laissant le soin de "recoller" les solutions aux points où f s'annule.

Par exemple vous savez résoudre depuis (très ?) longtemps une EDL de la forme

$$y' = ay$$

avec a constante, et aussi

$$y' = a(t)y$$

avec a continue, à condition de savoir prendre une primitive de a . (+ rappel en esquisse)

Enfin, vous savez chercher une solution particulière de

$$f(t)y' = a(t)y + b(t)$$

en utilisant la méthode de la variation de la constante.

A l'oral : Dans ce cours, nous allons voir des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n cette fois.

(le cas $n = 1$ étant le cas "classique" des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On peut y penser comme une trajectoire dans \mathbb{R}^n paramétrée par le temps (attention cependant, cette trajectoire n'est pas l'analogie du graphe d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

En même temps, on peut s'intéresser au cas des ED d'ordre plus qu'and que 1 (on s'autorise à faire intervenir des dérivées successives). Ce cas est très important en physique. On verra que, de notre point de vue, il se distingue à peine du cas précédent.

1.1.1 Définitions

Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur \mathbb{R}^n s'écrit

$$\dot{x} = A(t)x$$

ou $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$ intervalle de \mathbb{R} et où $A(t)$ est une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont des fonctions de t .

L'écrire ainsi est important, plutôt que sous la forme $B(t)\dot{x} + A(t)x = 0$, vu que dans ce cas, les endroits où B n'est pas inversible posent de gros problèmes. Quand elle est écrite sous la forme donnée en définition on dit qu'elle est sous forme résolue (ce qui est un vocabulaire délibérément optimiste, n'est-ce pas).

Une équation différentielle linéaire du premier ordre sur \mathbb{R}^n (plus forcément homogène, s'écrit

$$\dot{x} = A(t)x + v(t)$$

avec les mêmes objets, et $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (vu comme espace de vecteurs colonnes) continue. On appelle v le "second membre".

Le problème de Cauchy associé à l'équation est le problème de trouver une solution associée à une condition initiale pour $x(t_0)$.

Quand $A(t)$ est indépendant de t on dit que l'équation est à coefficients constants.

1.1.2 Le problème de l'ordre

Pourquoi considerer ces systèmes : parfois la quantité à étudier vis dans un espace de grande dim (l'espace des paramatres possibles pour tel objet...)

Parfois on a une seule quantité, mais une equadiff du genre

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

On se ramene a un systeme comme plus haut. (l'ecrire explicitement)

Plus généralement

Proposition 1.1.1 *L'espace des solutions de*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$$

est exactement l'espace des fonctions qui sont premier coefficient d'une solution de

$$\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

pour

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \dots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Preuve : On prend une application $x(t)$, et on regarde son premier coeff qu'on appelle $x_0(t)$ ou $y(t)$. On ecrit que si $x(t)$ est solution, il verifie l'equation, on ecrit le produit matriciel : $x_i = x_0^{(i)}$ et la derniere ligne donne l'equation scalaire de départ pour x_0 . Reciproquement si y est solution de l'equation scalaire, le vecteur des dérivées successives de y est solution de l'equation matricielle.

En pratique, pour retrouver la matrice, à partir de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$, la méthode consiste à introduire des fonctions auxiliaires $x_2 = y'$, $x_3 = y'' = x_2'$ etc. Et ensuite on peut ordonner en produit. Explicitement pour $n = 2$... En exercice pour $n = 3$.

1.1.3 Cas des coefficients constants, et exponentielle de matrice

On muni l'espace des matrices d'une norme d'algèbre (c'est à dire vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$). Par exemple la norme d'opérateur (rappel).

Rappel, toutes les normes d'un ev fini sont équivalentes (rappel de def). En particulier, nous avons une autre norme (d'ev, pas d'algèbre!) $\|\cdot\|_\infty$ qui est le sup des $|\cdot|$ des coeff.

Lemme 1.1.1 *Supposons qu'une suite de fonctions de I à valeur dans un espace de matrices converge uniformément sur I pour la norme d'opérateur. Alors c'est encore vrai pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Immédiat par équivalence des normes.

Rappel : *théorème de dérivation des suites (ou séries) de fonctions*. Si une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplement sur un segment I vers f_∞ , et si f_n est dérivable, et que la suite des dérivées f_n' converge uniformément sur l'intervalle I vers g_∞ , alors f_∞ est dérivable sur I et sa dérivée est g_∞ .

Ce résultat est classiquement vu pour des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . On voit même peut être des versions qui sont plus fortes.

Dans le cas de fonctions à valeurs dans un ev de dim finie, la remarque (Lemme) sur l'équivalence des normes, nous permet de nous ramener aux coordonnées et donc cet énoncé est encore vrai.

Rappelons l'exponentielle de matrice probablement déjà rencontrée :

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

La série converge (la convergence est normale : pour la norme d'opérateur, on majore la norme du reste par la somme des normes, ce qui fait de la suite des reste une suite de Cauchy.).

Introduisons un paramètre.

$$e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-t_0)^n A^n$$

A nouveau la convergence de cette série de fonction est normale sur tout segment.

Regardons la suite des sommes partielles, dérivées

$$f'_k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} n (t-t_0)^{n-1} A^n = A \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n-1!} (t-t_0)^{n-1} A^{n-1} \right) = A \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} (t-t_0)^n A^n \right)$$

qui est la somme partielle de la série

$$A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-t_0)^n A^n \right)$$

La convergence est aussi normale sur tout segment et la limite est $Ae^{(t-t_0)A}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation.

Il vient

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} = A e^{(t-t_0)A}.$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} x_0 = A e^{(t-t_0)A} x_0$$

pour tout vecteur x_0 .

Ainsi, dans le cas d'une équation différentielle à coefficients constants (A est constante), la fonction vectorielle

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$$

est une solution au problème de Cauchy en (x_0, t_0) .

Pour calculer l'exponentielle de matrices, il est judicieux de trouver une base dans laquelle elle a une forme simple.

Par exemple, si A est diagonalisable,

$$A = PDP^{-1}$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (PDP^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PD^n P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n \right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}$$

L'exponentielle d'une matrice diagonale D est par ailleurs exactement la matrice diagonale dont les coefficients sont les exponentielles des coefficients de D .

Remarque. Ce genre de considération vaut encore lorsque $A(t)$ est à coefficients variables, continus, et que $A(t+h)$ commute avec $A(t)$.

Ecrivons alors plutôt $B(t) = \int_{t_0}^t A(s)ds$ et $x(t) = e^{B(t)}$ et essayons de dériver.

Il vient dans la somme partielle : $x_k(t) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} B^n(t)$ que l'on dérive :

$$x'_k(t) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n-1!} B^{n-1}(t) B'(t)$$

(formule valable sous condition (!) en effet lorsqu'on écrit la définition, on doit prendre la limite de

$$\frac{B(t+h)^n - B(t)^n}{h} = \frac{(B(t) + hA(t) + o(h))^n - B(t)^n}{h} = \frac{(B(t)^n + nhA(t)B(t)^{n-1} + O(h^2)) - B(t)^n}{h}$$

si la formule du binôme est valide...)

Ainsi

$$x'_k(t) = A(t) \sum_{n=1}^k \frac{1}{n-1!} B^{n-1}(t)$$

Si l'on suppose A continue la convergence normale est assurée, et on peut conclure comme avant.

Remarque. En revanche, en général, on ne peut pas résoudre une équation différentielle "par quadrature" c'est à dire en calculant un nombre fini d'intégrales. (à rapprocher du fait que, d'après Galois, on ne peut pas en général écrire les solutions d'une équation polynomiale par radicaux).

1.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz, en linéaire

1.2.1 Préliminaire : Théorème de point fixe de Picard

[Lau, I-2 (5-6)]

Espace métrique : notion de distance. Exemple, dans \mathbb{R}^n la distance issue de la norme Euclidienne. Rappel : espace complet – suite de Cauchy.

\mathbb{R} est complet. \mathbb{Q} ne l'est pas.

On dit qu'une application $T : X \rightarrow X$ est contractante pour une certaine métrique d sur X , si $\exists 0 < \lambda < 1$, tel que $d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$.

Théorème 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide, et $T : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors T a un point fixe unique.*

L'unicité est facile. Pour l'existence, on montre que la suite des itérés de T est de Cauchy, et on montre que le point limite est bien fixé, par continuité de T en ce point.

Corollaire 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide, et $T : X \rightarrow X$ une application. Si un itéré T^r de T est contractante, alors T a un point fixe unique.*

En effet, si x_0 est le point fixe de T^r , $T(x_0)$ serait aussi point fixe de T^r , on conclut par unicité. L'unicité découle de celle pour T^r .

1.2.2 Théorème de Cauchy Lipshitz linéaire

[Lau, I-3 (1–4)]

Théorème 1.2.2 *On suppose A continue sur un intervalle I (à valeurs dans $M(n, \mathbb{R})$).*

Alors, pour tout $t_0 \in I$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution du problème de Cauchy en (x_0, t_0) pour l'équation $\dot{x} = A(t)x$, qui soit de classe C^1 et définie sur I .

Commentaires : 1 – en particulier ce théorème dit que les solutions maximales d'une EDLH sont définies sur I tout entier.

2 – Il suffit de montrer le théorème pour $J \subset I$ intervalle fermé borné (un segment quoi). En effet, si le résultat est faux, il existe t_1 tel que deux solutions au pb de Cauchy diffèrent en t_1 , ou bien qu'une solution maximale au pb de Cauchy n'est pas définie en t_1 . Dans les deux cas, cela falsifie l'énoncé sur $[t_0, t_1]$. Quitte à faire un reparamétrage (affine) on peut supposer que le segment en question est $[0, 1]$.

3 – On va chercher la solution sous la forme $\Gamma(t) = x_0 + \gamma(t)$ avec $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 prenant la valeur $\gamma(0) = 0$. Dans ces circonstances, Γ est solution si et seulement si γ est solution de

$$\gamma(t) = \int_0^t A(s)(x_0 + \gamma(s))ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Démonstration du théorème.

On va montrer que l'équation sur γ a une unique solution continue (et elle est forcément de classe C^1 dans ce cas).

On introduit l'espace vectoriel $\Lambda \subset C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ des chemins continus $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ partant de 0 ($\gamma(0) = 0$). On le munit de la norme $\|\gamma\|_\infty = \sup_t |\gamma(t)|$ (la norme est celle disons Euclidienne de \mathbb{R}^n). C'est la norme de la convergence uniforme, et cela en fait un espace complet.

Rappelons que pour chaque t , $A(t)$ est la matrice d'un endomorphisme de \mathbb{R}^n et que $\|A(t)\| = \sup_{x \neq 0} |A(t)x|/|x| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|$, qui est toujours fini en dimension finie.

Le fait que $A : [0, 1] \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ soit continue se traduit immédiatement par le fait que $t \mapsto \|A(t)\|$ est continue (de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}) et que donc elle y atteint son sup (notons $K = \max_{t \in [0, 1]} \|A(t)\| < \infty$).

On considère $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ défini par

$$(T\gamma)(t) = \int_0^t A(s)(x_0 + \gamma(s))ds$$

On aura trouvé une solution si on trouve γ tel que $T\gamma = \gamma$.

Voici le point crucial :

Lemme 1.2.1 *Il existe un entier $m \geq 1$ tel que T^m est une contraction pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Si on établit le Lemme, la conclusion de la démonstration du théorème est limpide : le théorème de Picard s'applique, et donne un point fixe γ , précisément ce qu'il nous fallait.

On doit donc montrer le Lemme.

Démonstration du lemme.

Prenons γ_1, γ_2 et calculons

$$T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t) = \int_0^t A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))ds$$

Majorons la norme par l'intégrale de la norme.

$$|T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t)| \leq \int_0^t |A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))|ds \leq \int_0^t \|A(s)\| |(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))|ds \leq \int_0^t K |(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))|ds$$

C'est donc

$$\leq Kt \|(\gamma_1 - \gamma_2)\|_\infty.$$

Si $K < 1$ cela nous donnerait immédiatement que T est une contraction... Mais ce n'est pas forcément le cas.

On doit donc essayer la même chose avec T^m .

Affirmation : pour tout m

$$|T^m\gamma_1(t) - T^m\gamma_2(t)| (= |(T^m\gamma_1 - T^m\gamma_2)(t)|) \leq \frac{K^m t^m}{m!} \|(\gamma_1 - \gamma_2)\|_\infty.$$

A nouveau si c'est vrai cela nous sort d'affaire, puisque étant vraie pour tout t cette relation devient, en prenant le $t^* (< 1)$ maximisant le côté droit :

$$\|T^m\gamma_1 - T^m\gamma_2\|_\infty \leq \frac{K^m}{m!} \|(\gamma_1 - \gamma_2)\|_\infty.$$

Il suffit de remarquer que $\frac{K^m}{m!} \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$ pour conclure que T^m est contractante si m est assez grand.

L'affirmation elle se démontre par récurrence. On a déjà fait le premier pas $m = 1$. Il reste le pas de récurrence à faire, il est identique au premier pas en réalité.

1.3 La Résolvante

1.3.1 Structure de l'espace de solutions

[Lau, I-3 (5-6)]

On reprend

$$\dot{x} = A(t)x$$

(A est une application continue associant à t un endomorphisme de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$ — si nos éléments de \mathbb{R}^n sont par convention des vecteurs colonnes, $A(t)$ est une matrice) et on s'intéresse à l'espace S de toutes les solutions maximales (c'est à dire définies sur I tout entier.

Soit $t_0 \in I$ fixé.

On défini

$$R_{t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow S$$

de la manière suivante : à un vecteur x_0 l'application R_{t_0} associe l'unique solution au problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) .

Ainsi $R_{t_0}(x) \in S$, et $(R_{t_0}(x))(t_0) = x$, et $d(R_{t_0}(x))(t)/dt = A(t)(R_{t_0}(x))(t)$. (dessin dans \mathbb{R}^2 , trajectoire)

Proposition 1.3.1 *L'espace S est un espace vectoriel.*

L'application R_{t_0} est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans S qui est un isomorphisme.

Commentaire : en particulier S est de dimension finie $= n$.

Preuve : on bascule sur l'équation vérifiée par les γ ...

Sachant que S est un espace vectoriel, l'application "valeur en t_0 " est clairement une application linéaire qui est inverse de R_{t_0} .

Munissons nous maintenant de deux temps t_1, t_2 . On défini à présent

$$R_{t_0}^{t_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

comme étant $R_{t_0}^{t_1} = R_{t_1}^{-1} \circ R_{t_0}$.

Cela a bien un sens. (dessin dans \mathbb{R}^2 , trajectoire)

Signification de $R_{t_0}^{t_1}$: on part d'un vecteur x , on prend la solution qui vaut ce x en t_0 , on regarde ce qu'elle vaut en t_1 , et c'est précisément ce qu'on appelle $R_{t_0}^{t_1}(x)$. C'est comme si on laisse "couler" l'équation entre les temps t_0 et t_1 , à partir de la valeur x .

Terminologie : la famille des application $R_{t_0}^t$ forme la résolvante de l'équation en t_0 . Connaitre

cette résolvante, c'est connaître les solutions en n'importe quelle valeurs de t , étant donnée la valeur initiale en t_0 . En définitive, c'est connaître les solutions maximales.

Un certain nombre de règles de calcul sont immédiates.

$$R_{t_1}^{t_2} \circ R_{t_0}^{t_1} = R_{t_0}^{t_2}; \quad R_t^t = Id; \quad \frac{d}{dt} R_{t_0}^t = A(t) R_{t_0}^t$$

Aussi la i -ème colonne de la résolvante $R_{t_0}^t$ est exactement la solution maximale a donnée initiale t_0, e_i pour e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

Exemple dans le cas de coefficients constants (matrice A constante), la résolvante vaut

$$R_{t_0}^t = e^{(t-t_0)A}.$$

[Lau, I-3 (7-8)]

1.3.2 Comportement du Wronskien, Théorème de Liouville

[Lau, I-3 (9-10)]

Même si calculer la résolvante explicitement en terme de fonctions "simples" peut être impossible, on peut calculer son déterminant.

Notons $Wr_{t_0}(t) = \det(R_{t_0}^t)$. On l'appelle le Wronskien de l'équadiff (en t_0).

Théorème 1.3.1 (*Liouville*)

Le Wronskien est solution de l'équadiff scalaire

$$\dot{v} = (\text{trace}A(t)) v$$

de condition initiale $v(0) = 1$.

Autrement dit

$$Wr_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{trace}A(s) ds}.$$

En particulier, on retrouve que le déterminant ne s'annule jamais (c'est à dire que la résolvante reste inversible).

Démonstration du théorème.

On considère la base canonique de \mathbb{R}^n , notée \mathcal{B} .

On “rappelle” l’identité suivante.

$$\sum_i \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{i-1}, A(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n) = (\text{trace}A) \times \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

Elle peut en fait s’établir de la manière suivante : elle est évidente pour les matrices diagonales. Elle est donc aussi vraie pour les diagonalisables. Les membres de gauches et de droites sont continus sur l’espace des matrices. On conclut par densité des matrices diagonalisables.

Prenons l’identité avec des vecteurs $v_j = x_j(t)$. En préliminaire, on a :

$$\frac{d}{dt} \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_i \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), \frac{d}{dt}x_i(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$$

(Tout développer avec la formule du déterminant, et dériver les produits)

Maintenant, si notre choix de $x_i(t)$ se place sur $x_i(t) = R_{t_0}^t(e_i)$, on a $\frac{d}{dt}x_i(t) = A(t)x_i(t)$, et on voit apparaître le lien avec l’identité de la trace.

On reporte :

$$\frac{d}{dt} \det_{\mathcal{B}} R_{t_0}^t = (\text{trace}A) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (\text{trace}A) \det_{\mathcal{B}} R_{t_0}^t.$$

C’est une équation différentielle linéaire d’ordre 1, le théorème découle de sa résolution.

Commentaires

En interprétant le déterminant comme un volume, on obtient l’idée suivante.

Si un domaine D de \mathbb{R}^n est soumis à l’équation d’évolution $D_t = R_{t_0}^t(D)$ la formule de changement de variable dans les intégrales multiples donne :

$$\text{vol}D_t = \det R_{t_0}^t \text{vol}D$$

En particulier, si $A(t)$ est de trace identiquement nulle, alors le volume est constant.

1.4 Equations non-homogènes

1.4.1 Variation de la constante

[Lau, I-3 (11)]

On considère maintenant des équations de la forme

$$\mathcal{E} : \quad \dot{x} = A(t)x + b(t),$$

avec A une application continue de I dans l'espace des matrices $n \times n$, et b une application continue de I dans \mathbb{R}^n identifié à l'espace des colonnes de taille n .

A une telle équation, on peut définir l'équation homogène associée

$$\mathcal{E}_h : \quad \dot{x} = A(t)x$$

L'énoncé est bien classique :

Proposition 1.4.1 *Si \mathcal{S}_h est l'espace des solutions de \mathcal{E}_h , et si x_p est une solution particulière de \mathcal{E} sur I , alors l'espace des solutions de \mathcal{E} sur I est exactement $x_p + \mathcal{S}_h$.*

Pour trouver une solution particulière, en dimension 1, on connaît la méthode de la variation de la constante. Cette méthode existe encore dans notre contexte.

On cherche γ_0 sous la forme $\gamma_0(t) = R_{t_0}^t c(t)$ ou c est une fonction vectorielle de classe C^1 .

Une telle fonction est solution si et seulement si :

$$\dot{\gamma}_0(t) = A(t)R_{t_0}^t c(t) + b(t)$$

Or, on a :

$$\dot{\gamma}_0(t) = \left(\frac{d}{dt} R_{t_0}^t \right) c(t) + R_{t_0}^t \dot{c}(t),$$

et on rappelle que $\frac{d}{dt} R_{t_0}^t = A(t)R_{t_0}^t$. On en déduit donc que γ_0 est solution si et seulement si :

$$R_{t_0}^t \dot{c}(t) = b(t)$$

autrement dit si et seulement si :

$$\dot{c}(t) = R_t^{t_0} b(t)$$

Il “suffit” d’intégrer : la fonction suivante convient :

$$c(t) = \int_{t_0}^t R_s^{t_0} b(s) ds.$$

Finalement $\gamma_0(t) = \int_{t_0}^t R_t^{t_0} R_s^{t_0} b(s) ds = \int_{t_0}^t R_s^{t_0} b(s) ds$ est une solution particulière.

1.4.2 Cas de l’ordre 2, de la dim 2, détails

Et nouveau regard sur résultats “connus”.

On étudie de plus près la nature de l’exponentielle de matrice donnée par une matrice compagnon (2x2). On y calcule le polynôme caractéristique, et il y a 2 cas. Soit il a deux racines réelles distinctes, soit deux racines non-réelles distinctes, soit une racine double. Dans le premier cas, tout se passe dans une base de diagonalisation. Dans le second cas, aussi, mais dans un \mathbb{C} -espace vectoriel. (si le vecteur de départ est purement réel, on sait que la solution le restera, et donc sera égale à sa partie réelle ce qui permet de retrouver l’expression en exponentielle, sinus, et cosinus). Enfin dans le troisième cas, la matrice s’écrit $D + N$ qui commutent, et on calcule facilement l’exponentielle dans une base adaptée. On retrouve la solution exceptionnelle.

Il est instructif de dessiner les “portraits de phases” du champ de vecteur associé à A – a coef constants. On peut y voir un noeud stable ou instable, un point selle, un foyer (cas complexe), un centre (cas imaginaire pur) ou un noeud impropre –stable ou instable.

1.5 Equations différentielles non linéaires, le théorème de Cauchy Lipschitz

Cette fois le contexte est une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = f(x, s),$$

où $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n par un interval I de \mathbb{R} .

On ne suppose plus que f est donnée par une application linéaire, ou affine.

1.5.1 Cauchy Lipschitz non linéaire

[Lau, I-4 (1—3)]

Théorème 1.5.1 *On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $t \in I$, l'application*

$$x \mapsto f(x, t)$$

soit k -lipschitzienne sur Ω .

Alors, pour tout point base $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$, il existe $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$ avec la propriété suivante.

Pour toute condition initiale $(x'_0, t'_0) \in \Omega \times I$ ϵ -proche du point base — c'est à dire vérifiant $|x_0 - x'_0| < \epsilon$, $|t_0 - t'_0| < \epsilon$ — il existe une unique solution

$$\Gamma : [t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha] \rightarrow \Omega$$

de l'équation $\dot{x} = f(x, s)$ avec la condition initiale $\Gamma(t'_0) = x'_0$.

De plus, toute solution de même condition initiale définie sur un intervalle $J \subset [t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha]$ est la restriction de Γ à J .

Commentaires : une première version utile et pratique, mais légèrement moins forte est de considérer $x'_0 = x_0$ et $t'_0 = t_0$. On lit alors que pour toute condition initiale, il existe un petit voisinage de t_0 , et une unique solution sur ce petit voisinage. La taille du voisinage dépend du choix des conditions initiales. En principe, cette taille peut tendre vers 0 assez rapidement si l'on change les conditions initiales... Cela signifierait que la solution "explose" d'autant plus vite que la condition initiale est modifiée dans telle ou telle direction.

La forme forte du théorème dit que la longueur de ce petit voisinage autour de t_0 peut, en fait, être choisie constante sur tout un ouvert de conditions initiales, interdisant ce genre d'explosion.

Comparer Cauchy-Lipschitz Linéaire à cet énoncé...

On peut donner en fait une valeur explicite (pas forcément optimale) pour cette constante α qui délimite ce “petit voisinage de temps”.

Proposition 1.5.1 (*Inégalité de sécurité*)

Si la boule fermée de centre x_0 et de rayon R est dans Ω ($B_R(x_0) \subset \Omega$), si l'intervalle $I_{\bar{\alpha}}(t_0) = [t_0 - \bar{\alpha}, t_0 + \bar{\alpha}] \subset I$, et si l'on pose

$$M = \sup_{t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)} |f(x_0, t)| + kR,$$

alors, pour une constante α choisie de sorte que

$$0 < \alpha < \frac{r}{M} \quad **$$

nous avons existence et unicité de la solution de condition initial (x_0, t_0) sur l'intervalle $I_{\alpha}(t_0)$.

Commentaire 1 : le choix de α garanti que ladite solution soit à valeurs dans $B_R(x_0)$, d'après le théorème des accroissements finis.

En effet, dans le cas contraire, il existe t_1 vérifiant $|x(t_1) - x(t_0)| < r$ pour $|t_1 - t_0| < |t_1 - t_0|$ $|x(t_1) - x(t_0)| = r$ et $|t - t_0| < \alpha$. On a alors $|\dot{x}| \leq M$ sur $[t_0, t_1[$ et l'inégalité des accroissements finis débouche sur une contradiction.

Commentaire 2 : un tel α convient pour un petit voisinage de conditions initiales autour de (x_0, t_0) (défini par un ϵ assez petit). Cela permet donc d'obtenir la forme forte du théorème à partir de la forme faible “explicite”.

Démonstration de Cauchy-Lipschitz non-linéaire. Comme on l'a dit, il suffit de montrer la proposition.

On peut se limiter à la condition initiale (x_0, t_0) . On effectue la même preuve que dans le cas linéaire. On introduit l'espace Λ des chemins continus dans la boule de rayon r de \mathbb{R}^n définis sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et vallant 0 en t_0 , avec la norme de la convergence uniforme, qui en fait un espace complet (la boule est alors aussi complète). On a alors $\gamma \in \Lambda$ est solution C^0 de

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t f(x_0 + \gamma(s), s) ds$$

si et seulement si γ est C^1 et $x_0 + \gamma$ est solution de l'équadiff (grâce à l'inégalité de sécurité, toute solution de l'équadiff donne bien un γ à valeurs dans la boule de rayon r).

On définit $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ par $T\gamma(t) = \int_{t_0}^t f(x_0 + \gamma(s), s) ds$. Grâce à l'inégalité de sécurité, T est bien à valeur dans Λ . En effet la norme de l'intégrale est plus petite que $M\alpha$ donc que r .

On majore en utilisant l'hypothèse Lipschitzienne $|T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t)| \leq \pm \int_{t_0}^t k|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| ds \leq k|t - t_0| \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$

On conclut par récurrence comme pour le linéaire.

1.6 Aux bornes de l'intervalle

[Lau, I-4 (4-5)]

1.6.1 Solutions maximales, explosions

A propos de l'unicité : On peut passer du "local" à un certain "global".

Proposition 1.6.1 *Si γ_1 et γ_2 sont deux solutions de $\dot{x} = f(x, t)$, de même condition initiale, et définies sur le même intervalle, alors elles sont identiques.*

On se place en la borne supérieure de temps où elles coïncident : $t_+ = \sup\{t > t_0, \gamma_1(s) = \gamma_2(s), \forall s \in [t_0, t]\}$. Par continuité $\gamma_1(t_+) = \gamma_2(t_+)$. On applique CL en $(\gamma_1(t_+), t_+)$: on a deux solutions qui coïncident donc localement, c'est à dire un peu après t_+ ; contradiction.

Définition 1.6.1 *On dit qu'une solution $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est maximale si elle n'a pas de prolongement (encore solution) à un intervalle contenant strictement J .*

Théorème 1.6.1 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz : pour toute condition initiale, il existe une unique solution maximale satisfaisant cette condition initiale.*

Démonstration : étant données deux solutions γ_1, γ_2 , définies sur J_1, J_2 , ayant cette condition initiale, on peut définir leur réunion définie sur $J_1 \cup J_2$ de la manière naturelle : $\gamma(t) = \gamma_i(t)$ si $t \in J_i$ (c'est bien défini car les deux solutions coïncident sur $J_1 \cap J_2$ d'après la proposition). $J_1 \cup J_2$ est encore un intervalle.

Notre candidat à être l'unique solution maximale est la réunion de toutes les solutions.

Si on prend t_- l'inf des itva sur lesquels une solution (avec cette condition initiale) est définie, et t_+ le sup, on obtient donc grace à cette construction une application définie sur $[t_-, t_+]$. Elle est bien solution, car en chaque t elle coincide autour de t avec une solution. Elle est bien max, par construction. L'unicité est assurée par la construction de réunion.

On fixe maintenant des conditions initiales, et la solution maximale est définie sur $]t_-, t_+[$.

Proposition 1.6.2 (*explosion en temps fini*)

Si $t_+ < \sup I$, alors γ sort de tout compact de Ω quand $t \rightarrow t_+$.

Rappel de la définition de compact (dans \mathbb{R}^n ce sont les fermés bornés, mais c'est spécifique à la dimension finie) : toute suite admet une sous-suite convergente.

Corollaire 1.6.1 *Si une solution maximale reste confinée dans un compact contenu dans Ω , alors elle est définie en tout temps de I .*

Démonstration de la proposition.

Prenons une partie compacte K . Supposons $t_+ \neq \sup I$. Si γ ne sort pas définitivement de K , il existe une sous-suite de $\gamma(t_+ - 1/n)$ qui converge dans K (par compacité). Soit x_+ sa limite.

Comme t_+ n'est pas le sup de I , on peut applique CL (fort) avec le point base (x_+, t_+) : il existe α tel que pour toute condition initiale assez proche (x_m, t_m) , il existe une solution γ_+ qui est définie sur $]t_m - \alpha, t_m + \alpha$.

On prend $(x_m, t_m) = (\gamma(t_+ - 1/n), t_+ - 1/n)$ dans la sous-suite convergente, et pour n assez grand (il verifie alors les hypotheses). Par unicité, la solution vendue par CL n'est pas différente de γ .

Or si t_m est assez proche de t_+ , $t_m + \alpha > t_+$, ce qui contredit la maximalité de t_+ .

Exemple

$$\dot{x} = x^2$$

En principe $I = \mathbb{R}$.

Solution de l'équation : $\gamma(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0-t)+1}$ qui explose en $t_0 + 1/x_0$.

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

On vérifie que, pour $x_0^2 + y_0^2 = 1$, une solution est donnée par

$$x = x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0) \quad y = x_0 \sin(t - t_0) - y_0 \cos(t - t_0)$$

paramétrant ainsi le cercle.

Par unicité des solutions à condition initiale donnée aucune autre solutions ne rencontre le cercle. Donc si $x_1^2 + y_1^2 < 1$, la solution associée restera dans le disque unité ouvert.

1.6.2 Le Lemme de Gronwall

Il s'agit d'un contrôle *a priori* qui garanti la non-sortie des compacts. On suppose que $|f(x, t)| \leq g(|x|, t)$ pour une fonction g continue.

Lemme 1.6.1 Soit ρ une solution de $\dot{y} = g(y, t)$, définie sur $[t_0, t_1[$, a valeur dans $[0, +\infty[$.

Soit $\gamma : [t_0, t_1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable tel que

$$|\gamma(t_0)| = \rho(t_0), \quad |\dot{\gamma}(t)| < g(|\gamma(t)|, t).$$

Alors pour tout $t \in]t_0, t_1[$, on a

$$|\gamma(t)| < \rho(t)$$

Par exemple, quand f vérifie $|f(x, t)| \leq g(|x|, t)$, aucune solution de $\dot{x} = f(x, t)$ avec $|\gamma(t_0)| = \rho(t_0)$ ne peut exploser sur $[t_0, t_1[$.

Preuve : un DL en t_0 donne

$$\rho(t) = \rho(t_0) + (t - t_0)g(\rho(t_0), t_0) + o(t - t_0)$$

et de même pour $\gamma(t)$. En majorant la norme (inégalité triangulaire, il vient, pour $t > t_0$:

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)| + (t - t_0)|\dot{\gamma}(t_0)| + o(t - t_0)$$

on retranche la seconde ligne à la première,

il vient

$$\rho(t) - |\gamma(t)| \geq 0 + (t - t_0)(g(\rho(t_0), t_0) - |\dot{\gamma}(t_0)|) + o(t - t_0)$$

ce qui est strictement positif au voisinage à droite de t_0 , et on voit que la conclusion est vraie au voisinage à droite de t_0 .

Si la conclusion est fautive, alors par continuité, il y a un premier instant où elle est fautive, et ce n'est pas t_0 par la sécurité juste établie. Notons t'_0 cet instant. On peut refaire le même argument en t'_0 , et cette fois, pour $t < t'_0$, minorer $\gamma(t)$ par

$$|\gamma(t)| \geq |\gamma(t'_0)| + (t - t'_0)|\dot{\gamma}(t'_0)| + o(t - t'_0)$$

(le second terme vaut $-|(t - t'_0)\dot{\gamma}(t'_0)|$ pour $t < t'_0$)

et donc majorer $\rho(t) - |\gamma(t)|$ par

$$\rho(t) - |\gamma(t)| \leq 0 + (t - t'_0)(g(\rho(t'_0), t'_0) - |\dot{\gamma}(t'_0)|) + o(t - t'_0)$$

pour $t < t'_0$, et ainsi obtenir $\rho(t) - |\gamma(t)| < 0$ au voisinage à gauche de t'_0 ce qui donne une contradiction avec la définition de t'_0 .

Remarque : c'est un argument qui ne contrôle que le futur de t_0 .

Exemple

On suppose une majoration linéaire (ou affine)

$$|f(x, t)| \leq \alpha|x| + \beta$$

avec α, β constantes positives.

Alors, si $\alpha \neq 0$, on a, pour toute solution de l'équation :

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)|e^{\alpha|t-t_0|} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha|t-t_0|} - 1)$$

Si $\alpha = 0$, on a

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)| + \beta|t - t_0|.$$

Pour $t > t_0$ cela va découler de Gronwall. Pour obtenir cela il faudrait en principe une inégalité stricte au contrôle. Mais on l'a si on remplace β par $\beta + \epsilon$ pour ϵ quelconque. On a donc une famille de majorations, et on fait tendre ϵ vers 0 pour conclure.

Pour $t < t_0$, il faut considérer le changement de variable $t' = -t$, ce qui donne l'équation différentielle $\dot{x} = -f(x, -t')$.

Application : tube de solutions et continuité par rapport aux conditions initiales [Lau, I.4.10-13]

Proposition 1.6.3 *Soit $\dot{x} = f(x, t)$ avec f k -lipschitzienne pour la première variable. Soit $[t_0, t_1] \subset I$ et γ_0 une solution sur cet intervalle.*

Alors, il existe $\rho > 0$ tel que si $\tilde{t}_0 \in [t_0, t_1]$, et si $\tilde{x}_0 \in \Omega$ est à distance $< \rho$ de $\gamma_0(\tilde{t}_0)$, alors la solution maximale $\tilde{\gamma}_0$ de condition initiale \tilde{t}_0, \tilde{x}_0 est définie sur $[t_0, t_1]$.

(dessin en dim 1)

De plus, si $\tilde{t}_n \in [t_0, t_1]$ converge vers $\tilde{t}_\infty \in [t_0, t_1]$ et si \tilde{x}_n est une suite v convergeant vers $\gamma_0(\tilde{t}_\infty)$, alors la suite $\tilde{\gamma}_n$ converge uniformément vers γ_0

(dessin)

On commence par dire que γ_0 est en fait définie sur un ouvert, donc sur un certain $]t_0 - 2\epsilon, t_1 + 2\epsilon[$.

soit $u = \tilde{\gamma} - \gamma_0$.

On a facilement que $\tilde{\gamma}$ est solution si et seulement si u est solution de

$$\dot{u} = f(\gamma_0(t) + u(t), t) - f(\gamma_0(t), t).$$

On veut utiliser Gronwall sur cette équation pour garantir la survie de la solution, et la petite norme-infinie de la solution (a C.I. donnée proche du graphe de γ_0).

Affirmation : il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$, la boule de \mathbb{R}^n centrée en $\gamma_0(t)$ et de rayon r est contenue dans Ω .

C'est une consequence classique de la compacité de $\gamma_0([t_0 - \epsilon, t_1 + \epsilon])$ dans l'ouvert Ω . (Par l'absurde une suite de points ou le rayon maximal est $1/n$ a une sous-suite convergente, et Ω etant un voisinage de la limite, on obtient une contradiction).

L'equation différentielle en u est donc définie sur $B(2r) \times]t_0 - \epsilon, t_1 + \epsilon[$ par

$$\dot{u} = g(u, t)$$

avec $|g(u, t)| \leq k|u|$ par propriété de f d'être k -lipschitzienne.

On applique Gronwall (l'un des exemples trait es avant) pour avoir

$$\|u(t)\| \leq \|u(\tilde{t}_0)\| e^{k|t - \tilde{t}_0|}$$

ce qui donne en norme infinie, pour le choix de $\rho = r e^{-k|t_1 - t_0|}$,

$$\|u\|_\infty \leq r$$

dès que $\tilde{\gamma}(\tilde{t}_0)$ verifie l'hypothese.

On a donc le premier point. Le second découle facilement de l'estimation explicite.

Remarque : la proposition ne s'applique que si l'intervalle de temps est compact. Dans le cas de \mathbb{R} , l'exemple de $\dot{x} = x^2$ nous avais déjà donn e des solutions avec un pole en $1/x_0$ pour x_0 la valeur en 0. La solution nulle est instable dans le sens ou toute perturbation provoque une explosion. Mais sur un compact $[-T, T]$ les perturbations suffisamment petites ne se font guere sentir.

1.7 Théorie locale des courbes dans \mathbb{R}^3 , paramétrisations

1.7.1 Définitions et chaussees trappes

[Ber. Gos., 8.0, 8.1]

Pour nous une courbe paramétrée (ou plutôt une paramétrisation d'une courbe) dans \mathbb{R}^n sera (I, f) où f est une "immersion" d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n de classe C^p avec $p \geq 1$, souvent $p \geq 2$.

Définition. Une immersion de classe C^p est une application de classe C^p dont la dérivée ne s'annule jamais.

Contrexemple : n'est pas une immersion la paramétrisation suivante

$$f(t) = (e^{1/t}, 0), (0, 0), ; (0, e^{-1/t})$$

selon que

$$t < 0, t = 0, t > 0.$$

On distingue volontairement la notion de courbe (ou d'arc) paramétrée de celle de courbe, qui serait l'image de l'intervalle par une telle application (même munie d'une orientation intrinsèque). En effet, il peut y avoir des manières vraiment différentes de paramétrer de braves arcs (dessiner des exemples, anneaux de Hawaï, le "8", le 8 dans un cercle circonscrit, etc).

On ne demande pas que nos paramétrisations soient injectives. Parfois elles ne peuvent pas l'être! (exemple de courbe avec auto intersection).

Rappel : un difféomorphisme (entre 2 intervalles) est une application bijective C^1 de réciproque C^1 . Ou encore, c'est une application bijective C^1 dont la dérivée ne s'annule jamais.

Définition 1.7.1 On dit que deux paramétrisations d'arcs $(I, f), (J, g)$ de classe C^p sont C^p -équivalents s'il existe $\psi : I \rightarrow J$ un difféomorphisme croissant tel que $f = g \circ \psi$.

On dit que ψ est un changement de paramétrisation.

Une classe d'équivalence par cette relation est ce qu'on appelle un arc géométrique.

Exemples : un cercle de rayon R paramétré de deux manières.

$$f(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t)) \quad g(t) = (R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R}) \quad h(t) = R(\cos(t^2), \sin(t^2))$$

sur des intervalles convenables.

On appelle multiplicité d'un point (de l'espace) le cardinal de sa préimage (c'est le nb de fois qu'on y passe).

Il faudra bien distinguer les points de l'espace d'arrivé et les points de la paramétrisation (exemple du trefle parti d'en haut : le point central a 3 incarnation par la paramétrisation, et ce qui se passe localement en ce "point" au 3 différents instants n'a rien à voir. Berger-Gostiaux préconise de noter p "entouré par un rond" pour parler du point muni de la paramétrisation locale.

Il s'agit formellement d'une classe d'équivalence de triplet (I, f, t) ou deux triples sont équivalents si on obtient l'un depuis l'autre par changement de paramétrisation. On appelle une telle classe "point géométrique" de l'arc.

1.7.2 Exemples de coordonnées

a — Cartésiennes. Ce sont les coordonnées usuelles. On peut étudier les variations de chaque coordonnées. Si en t_0 la norme de $f(t)$ tend vers $+\infty$ on a affaire à une branche infinie. On peut parfois extraire une *direction asymptotique*, quand le vecteur $O\vec{f}(t)/\|O\vec{f}(t)\|$ a une limite \vec{v} . On peut alors étudier l'éventualité d'une *droite asymptote* en étudiant la projection orthogonale de $f(t)$ sur un plan orthogonal à \vec{v} .

En dimension 2, on peut chercher la limite du rapport des coordonnées (la pente de la droite vectorielle).

b — Exemple des coordonnées polaires.

Définition 1.7.2 On appelle *paramétrisation en polaire* une paramétrisation d'un arc dans \mathbb{C} (identifié à \mathbb{R}^2) de de la forme

$$f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Dans ce cas, $\theta(t)$ est l'angle entre l'axe réel et la demi-droite d'origine 0, portant $f(t)$ si $\rho(t) > 0$, ou portant $-f(t)$ si $\rho(t) < 0$.

Le cas "usuel" est celui où $\theta(t) = t$.

On peut facilement passer d'une paramétrisation polaire à une paramétrisation en coordonnée, mais cela présente en général peu d'interet : le fait qu'une paramétrisation soit en

polaire facilite en général son étude.

Etude en polaire : on commence par réduire l'intervalle de définition en utilisant les symétries (fonction paire, impaire, invariance par rotation...)

Puis on étudie le signe de ρ , plutôt que ses variations.

Selon le comportement de $|\rho(\theta)|$ en $+\infty$, on peut déduire du spiralement en s'éloignant à l'infini (si $|\rho(\theta)| \rightarrow \infty$), un cercle asymptote (si $|\rho(\theta)| \rightarrow R \in \mathbb{R}_+^*$), ou un point asymptote si $|\rho(\theta)| \rightarrow 0$.

Si $|\rho(\theta)| \rightarrow_{\theta_0} \infty$ pour une valeur finie de θ_0 , on a une "branche infinie" à l'angle θ_0 . Dans ce cas, la projection orthogonale du point en θ sur une droite orthogonale à la direction θ_0 (dessin) en dit plus. Si cette projection $\pi(\theta)$ a une limite, on a une droite asymptote, si elle n'en n'a pas, on n'a pas de droite asymptote, si elle tend vers ∞ on parle parfois de branche parabolique.

Exemple : $\rho(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1}$.

Il suffit d'étudier sur $[0, +\infty[$ (et de compléter par une symétrie axiale d'axe (Ox)).

Ici le signe de ρ est clair, selon que $|\theta| > 1$ ou < 1 . Pour $\theta \rightarrow +\infty$, le cercle de rayon 1 est asymptote. (la courbe est à l'extérieur du disque)

Pour $\theta \rightarrow 1$, on a une direction asymptote. Mais on cherche mieux : peut être une droite asymptote (ou peut être autre chose... ex : une branche parabolique). En posant $\theta = 1 + h$ on obtient $\rho = \frac{1+2h+h^2}{2h+h^2}$. On cherche la projection sur l'orthogonal de la direction asymptote. On regarde donc $\sin(\theta - 1) = h + o(h^2)$, et $\rho(\theta) \times \sin(\theta - 1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}h + o(h)$. On a donc une droite asymptote pour $\theta \rightarrow 1$, mais attention, quel "bout" de la droite on approche est déterminé par le signe de $\theta - 1$...

c — Coordonnées cylindrique : Il s'agit dans \mathbb{R}^3 de privilégier un plan, et son supplémentaire orthogonal, et de paramétrer comme

$$f(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t, 0) + (0, 0, z(t))$$

d — Coordonnées sphériques : il s'agit de paramétrer proportionnellement au vecteur

$$\vec{I}(\theta, \phi) = \vec{u}(\theta) \cos \phi + \vec{e}_3 \sin \phi$$

pour $\vec{u}(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. (dessin)

1.7.3 Tangente, abscisse curviligne

[Ber. Gos., 8.2, 8.3]

Définition 1.7.3 Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^1 immergé. La tangente à l'arc (I, f) au point $t \in I$ est le sous espace affine de dimension 1 donné par

$$f(t) + \mathbb{R}f'(t).$$

Remarque : un changement de paramétrisation (par un difféo) conserve la tangente (au point géométrique).

Reflexion : c'est donc le choix de définir la tangente par la dérivée qu'on fait ici... Quelle aurait été *votre* choix de définition de tangente ?

Définition 1.7.4 On appelle vecteur tangent unitaire de l'arc paramétré (I, f) au point t le vecteur

$$\tau(t) = f'(t)/\|f'(t)\|$$

Voyons maintenant une famille de paramétrisations "mieux que les autres"

Définition 1.7.5 Une paramétrisation (I, f) est dite par longueur d'arc ou par abscisse curviligne, si $\|f'(s)\| = 1$ pour tout s . Dans ce cas, la variable $s \in I$ est appelée l'abscisse curviligne

On préfère noter la variable s pour une telle paramétrisation, et la noter t si ce n'est pas par longueur d'arc.

Théorème 1.7.1 Pour tout arc paramétré C^1 immergé, il existe une paramétrisation par longueur d'arc. Par ailleurs deux telles paramétrisations diffèrent d'un changement de paramétrisation de la forme $s \mapsto s - s_0$

Preuve : Il s'agit de poser " $s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$ " qui mesure la longueur (algébrique) de l'arc entre t_0 et t . On a $\psi'(t) > 0$ par hypothèse (par def d'immersion, $\|f'(t)\| > 0$). Donc

ψ est inversible, et $\lambda = \psi^{-1}$ est un diffeo de $\psi(I)$ dans I . On peut même calculer (en dérivant $\psi \circ \lambda(s)$ selon s) : $\lambda'(s) = \frac{1}{\psi'(\lambda(s))}$.

Maintenant $(f \circ \lambda)'(s)$ est de norme 1 : en effet

$$(f \circ \lambda)'(s) = \lambda'(s)f'(\lambda(s)) = \frac{1}{\psi'(\lambda(s))}f'(\lambda(s)) = \frac{1}{\|f'(\lambda(s))\|}f'(\lambda(s)).$$

Unicité : Si on a 2 paramétrisations conjuguées par un diffeo θ , on calcul facilement que $\theta'(s)$ est de norme 1, donc (puisque c'est un nombre) $\theta'(s)$ vaut 1 ou -1 constamment. Le second cas n'est pas croissant, donc pas admissible (il correspond à un changement d'orientation de la courbe paramétrée).

Remarque : le fait d'être par longueur d'arc est une propriété de la paramétrisation qui est invariante par (post-)composition par une isométrie de l'espace.

Justifions la terminologie.

Définition 1.7.6 On appelle la longueur de l'arc paramétré (I, f) entre les points géométriques $[f(a)]$ et $[f(b)]$ (avec $a, b \in I$) l'intégrale :

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Remarque 1 : c'est l'intégrale de la vitesse, c'est donc bien la distance parcourue... Cela mesure la longueur de l'arc parcourue. C'est aussi la différence d'abscisse curviligne.

Remarque 2 : ce nombre est indépendant de la paramétrisation. (en effet, c'est la formule de changement de variable dans l'intégrale qui le garantit).

Exemple 1 : longueur d'arc de cercle. Soit

$$f(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

l'arc de cercle entre $[f(\alpha)]$ et $[f(\beta)]$ se calcule et vaut $R(\beta - \alpha)$

Exemple 2 : longueur d'arc de parabole

$$f(t) = (t, \frac{1}{2p}t^2)$$

$f'(t) = (1, t/p)$ et $L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + t^2/p^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{1 + t^2/p^2}]_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2/p^2}}$. Il vient $2L(f, a, b) = [t\sqrt{1 + t^2/p^2}]_a^b + p[\text{Argsh} \frac{t}{p}]_a^b$.

Exemple 3 : En polaire, en paramétrant par $\rho(\theta(t)), \theta(t)$ on a

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2} dt$$

longueur d'arc de lemniscate $\rho(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$ pour $\theta \in]0, \pi/4[$. (demi boucle de la lemniscate de Bernouilli

$$(x^2 + y^2)^2 + -a^2(x^2 - y^2) = 0$$

$L = \int_0^{\pi/4} a \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. Apres changement de variable $r = \rho(\theta)$ il vient

$$L = \int_0^a a^2 \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = a \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}$$

Exemple 4 : le calcul de la circonference d'une ellipse : il n'est pas simple (ecrivez les equations... faire apparaitre $\int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du = \int_0^a \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$) en particulier fait apparaitre une integrale qu'on ne sait pas calculer avec des fonctions elementaire ou usuelles, comme celle ci dessus. Ce sont les integrales elliptiques. On peut en faire des calculs approchés en développant en séries.

Exemple 5 en sphérique. Rappel, $f(t) = \rho(t)I(\theta(t), \phi(t))$ pour $\vec{I}(\theta, \phi) = \vec{u}(\theta) \cos \phi + \vec{e}_3 \sin \phi$ (pour $\vec{u}(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$).

Si l'on pose $\vec{u}_1(\theta) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$, on peut calculer que $f'(t) = (\rho' \cos \phi - \rho \phi' \sin \phi) \vec{u} + \rho \theta' \cos \phi \vec{u}_1 + (\rho' \sin \phi + \rho \phi' \cos \phi) e_3$

On a alors

$$L(f, a, b) = \int_a^b (\rho'^2 + \rho^2 (\phi')^2 + \rho^2 (\theta')^2 \cos^2 \phi)^{1/2} dt$$

1.8 Théorie locale des courbes : trièdres de Frenet

1.8.1 Courbure(s)

[Ber. Gos., 8.4, 8.5] (En principe seulement la courbure absolue)

Définition 1.8.1 Soit (I, f) une paramétrisation par abscisse curviligne d'un arc.

En un point s , la courbure de l'arc est définie comme

$$K(s) = \|f''(s)\|.$$

Définition 1.8.2 (Plan osculateur)

Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^2 , avec une paramétrisation f par longueur d'arc.

On dit qu'il est "birégulier" en s si $f''(s) \neq 0$

En un point t d'un tel arc birégulier, le plan osculateur est le plan $(f(s) + \mathbb{R}f'(s) + \mathbb{R}f''(s))$.

La normale principale est définie par $\nu(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$ (interprétation géométrique)

Le cercle osculateur est le cercle du plan osculateur, passant par $f(s)$, dont le centre est $f(s) + \frac{1}{K}\nu(s)$.

Le rayon de courbure est $\frac{1}{K(s)}$.

Remarque : le plan osculateur est bien un plan affine.

La courbure est un invariant par isométrie de l'espace.

Proposition 1.8.1 Si (g, J) est une paramétrisation arbitraire, un point est biregulier si et seulement si $g'(t)$ et $g''(t)$ forment une famille libre en tant que vecteurs.

Aussi :

$$K = \frac{\|g' \wedge g''\|}{\|g'\|^3}$$

En effet $g'(t)$ est proportionnel à $f'(s)$ (notez le s et le t), et g'' est combinaison linéaire de f' et f'' . On note que g', g'' forme une famille libre si et seulement si f', f'' aussi.

Enfin, on a toujours f'' orthogonal à f' (mais ce n'est pas nécessairement le cas pour g) :

$$\langle f', f'' \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle f', f' \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 1 = 0$$

donc $f'' \perp f'$. On a donc (f'', f') liée ssi $f'' = 0$ ssi $K = 0$

Pour le calcul de la courbure, voir en TD ?.

1.8.2 Torsion, repere et formules de Frenet

[Ber. Gos., 8.6]

On suppose qu'on se trouve en dimension 3.

On considère (I, f) une paramétrisation par abscisse curviligne d'un arc de classe C^3 .

En un point bi-régulier, on définit le vecteur normal unitaire

$$\nu(s) = \frac{1}{\|f''(s)\|} f''(s) = \frac{1}{K(s)} f''(s)$$

Proposition 1.8.2 *Le vecteur normal unitaire est bien unitaire, et normal au vecteur tangent.*

En fait on l'a déjà fait (le refaire)

Le vecteur binormal est défini ainsi :

$$\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$$

Proposition 1.8.3 *Les trois vecteurs forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On l'appelle le trièdre de Frenet.*

Proposition 1.8.4 *$\beta'(s)$ est colinéaire à $\nu(s)$.*

preuve : dériver des produits scalaires...

On définit la *torsion* au point s comme étant $T(s)$ vérifiant

$$\beta'(s) = T(s)\nu(s)$$

Proposition 1.8.5 *Relation de Frenet.*

En coordonnées d'abscisse curviligne :

$$\frac{d}{ds}\nu(s) = -K(s)\tau(s) - T(s)\beta(s)$$

En résumé

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\tau(s) = & K(s)\nu(s) \\ \frac{d}{ds}\nu(s) = & -K(s)\tau(s) \quad -T(s)\beta(s) \\ \frac{d}{ds}\beta(s) = & T(s)\nu(s) \end{cases}$$

Proposition 1.8.6 Une courbe plane (c'est à dire contenue dans un plan) a une torsion nulle.

Réciproquement, une courbe dont la torsion est identiquement nulle reste dans un seul plan, qui est le plan osculateur en tout point.

Si la torsion est nulle, la binormale est constante. Quitte à déplacer dans l'espace, on peut supposer que la courbe passe par 0 et que la binormale est dans l'axe (z); le vecteur tangent, normal a la binormale, reste dans le plan ($z = 0$), et donc la dérivée de la troisième coordonnée de la position est nulle. La troisième coordonnée est donc constamment nulle.

Réciproquement, si la courbe est plane, on peut la supposer dans le plan $z = 0$ après déplacement isométrique. Comme la dérivée de la troisième coordonnée de la position est nulle, τ reste toujours dans ce plan, et donc sa dérivée aussi, donc ν aussi.

Proposition 1.8.7 Le signe de la torsion indique le sens de traversé du plan osculateur.

Plus précisément

$$\langle f(s) - f(s_0), \beta \rangle = \frac{(s - s_0)^3}{6} (-KT + o((s - s_0)^3)) \beta$$

D'après Taylor, on a :

$$\begin{aligned} f(s) - f(s_0) = & (s - s_0)\tau(s) + \frac{(s-s_0)^2}{2} K\nu(s) + \\ & + \frac{(s-s_0)^3}{6} \times (-K^2\tau + K'\nu - KT\beta) + o((s - s_0)^3) \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire la formule annoncée, sous la forme

$$\begin{aligned} f(s) - f(s_0) = & (s - s_0) \times \left(1 - K^2 \frac{(s-s_0)^2}{6} + o((s - s_0)^2) \right) \tau + \\ & + \frac{(s-s_0)^2}{2} (K + K' + o(s - s_0)) \nu + \\ & + \frac{(s-s_0)^3}{6} (-KT + o((s - s_0)^3)) \beta \end{aligned}$$

1.9 Théorème “fondamental” de la théorie locale des courbes

[Ber. Gos., 8.6]

Théorème 1.9.1 *Soient :*

- I un intervalle de \mathbb{R} ,
- $k : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1
- $t : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue.

Alors, il existe un arc paramétré orienté de classe C^3 paramétré sur I par longueur d'arc, et dont la fonction courbure vaut k et la fonction torsion vaut t .

De plus, deux tels arcs paramétrés diffèrent l'un de l'autre par la post-composition d'une isométrie de \mathbb{R}^3 .

Il s'agit en fait d'une application du théorème de Cauchy Lipschitz linéaire.

L'univité va découler de la preuve générale, mais il existe un joli moyen de l'établir.

Supposons (I, f_1) et (I, f_2) deux paramétrisations par long. d'arc vérifiant les conditions du théorème, et quitte à utiliser une isométrie de l'espace, on suppose que leurs trièdres de Frenet coïncident en t_0 .

On regarde alors la fonction C^1

$$\alpha = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle + \langle \nu_1, \nu_2 \rangle + \langle \beta_1, \beta_2 \rangle.$$

On la dérive : grâce aux formules de Frenet, on obtient $\alpha' = 0$. Donc α est constante égale à $\alpha(s_0) = 3$.

Tous les vecteurs impliqués ont norme 1, et Cauchy Schwarz (cas d'égalité) force donc τ_1 et τ_2 à être colinéaires, donc égaux, car de norme 1. On intègre pour avoir $f_1 = f_2$.

Preuve générale (en particulier de l'existence).

On considère l'équation différentielle

$$(X', Y', Z') = (kY, -kX - tZ, tY)$$

dans laquelle X, Y , et Z sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , et avec comme donnée initiale en $s_0 \in I$ un trièdre orthonormé direct.

C'est une equation différentielle linéaire (de taille 9), et d'après CL, elle admet une solution sur tout I .

On doit montrer que cette solution est bien le triedre de Frenet d'un arc paramétré par longueur d'arc de courbure k et de torsion t .

1er point : (X, Y, Z) est un triedre orthonormé direct.

En effet regardons

$$\theta(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, Z \rangle)$$

qui témoigne de cette propriété ((X, Y, Z) est un triedre orthonormé (direct) ssi θ est identiquement $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ (et que le triedre est direct au moins une fois).

Ecrivons

$$\theta'(t) = (\langle 2kX, Y \rangle, -\langle 2kX, Y \rangle - \langle 2tZ, Y \rangle, \langle 2dZ, Y \rangle, \dots$$

$$\dots k\|Y\|^2 - k\|X\|^2 - t\langle X, Z \rangle, k\langle Y, Z \rangle + t\langle X, Y \rangle, -k\langle X, Z \rangle - t\|Z\|^2 + t\|Y\|^2).$$

C'est à dire que θ (en tant que fonction dérivable dans \mathbb{R}^6) vérifie une EDL continue. Par CL, la solution sur I à donnée initiale $\theta(s_0) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ existe et est unique. Or clairement la solution constante verifie l'équation. Ainsi, θ est bien constante. Le repere (X, Y, Z) est bien orthonormé direct en chaque instant.

Maintenant integrons : $f(s) = u + \int_0^s X(t)dt$, où u est la donnée initiale pour $f(s_0)$.

On a $f'(s) = X(s)$ donc de norme 1 (d'après ce qu'on vient de montrer). Ainsi f est une paramétrisation par long. d'arc d'une certaine courbe. Il reste à voir qu'elle satisfait le théorème.

On a $X' = kY$, et Y de norme 1. Il vient que k est bien la courbure de l'arc ainsi défini, et aussi que Y est son vecteur normal unitaire. Puisque (X, Y, Z) est orthonormé direct en tout instant, Z est bien le binormal à l'arc.

Comme $k > 0$ en tout point, l'arc défini est birégulier, on peut regarder sa torsion et $Z' = tY$ par hypothèse, ce qui garanti que t est bien la torsion.

Exemple d'application : une courbe dont la courbure et la torsion sont constantes est une helice circulaire. (On défini une helice circulaire ayant ces courbures et torsion et on invoque

l'unicité du théorème).

1.9.1 Compléments : théorie locale des points singuliers

[Arn. Fray., pp302-310]

On abandonne ici la confortable hypothèse que f est une immersion C^1 . On suppose $f \in C^\infty$.

Exemple fondamental : projection d'une courbe de \mathbb{R}^3 sur un plan. A chaque fois que $f'(s)$ est orthogonale au plan, on perd la propriété d'être une immersion localement autour de ce point.

But : étude au voisinage de 0. On suppose $f(0) = 0$, quitte à déplacer.

Posons $S(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m f^{(m)}(0)$ la série de Taylor en l'origine (formelle).

Soit p le premier entier tel que $f^{(p)}(0) \neq 0$. On définit la tangente géométrique comme la droite dirigée par $f^{(p)}(0)$.

Hypothèse supplémentaire : la famille des dérivées d'ordre plus grand est de rang ≥ 2 .

L'entier p est choisi comme précédemment. Soit q le plus petit entier tel que $f^{(q)}(0)$ ne soit pas colinéaire à $f^{(p)}(0)$.

Soit \mathcal{B} la base $(e_1 = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0), e_2 = \frac{1}{q!} f^{(q)}(0))$. Dans cette base, on a

$$f(t) = (t^p + o(t^p))e_1 + (t^q + o(t^q))e_2 + o(t^q)$$

Dessin de l'arrivée sur le point $f(0)$ muni du repère e_1, e_2 (dans ce plan).

Puis, 4 cas pour la suite, selon la parité de p et de q . La parité de chaque contrôle la traversée ou non de la droite $f(0)$, \vec{e}_i respectivement...

Dessins des 4 cas, avec les noms (quand p est pair) "rebroussement de première espèce, ou de deuxième espèce" selon que q soit impair ou pair.

1.9.2 Compléments : développantes, développées, trajectoires orthogonales...

Definitions :

La développée de f est la courbe des centres de courbures de la courbe f .

La développante h_a de g est la courbe $h_a(t) = g(t) + (a - t)\tau(t)$.

Dessin : point d'attache sur le tracé de g , et ficelle de longueur a depuis ce point d'attache.
trajectoire de l'extrémité de cette ficelle quand la ficelle est plaquée sur la trajectoire de f .

La parallèle g_a de g est la courbe $g_a(t) = g(t) + (a)\nu(t)$.

2 Fonctions de plusieurs variables réelles $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

“Ce sont des morceaux de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n , paramétrés” (à prendre avec des pincettes : que veut dire “morceaux”, que veut dire “paramétré”... Et comme les courbes, le résultat ne ressemble pas forcément, même localement, à \mathbb{R}^m ...)

Exemple crucial à garder en tête : des morceaux de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 ...

2.1 Dériver, ou différentier

On considère une (gentille) fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Vous savez définir la continuité de f (la propriété d’être continue).

Vous savez définir la propriété d’être dérivable pour f en un point x , ou bien sur un intervalle I , ou même sur \mathbb{R} .

On a une définition formelle. f est dérivable en x_0 si la limite du taux d’accroissement en x_0 existe. (l’écrire).

Vous avez aussi développé une plus ou moins grande intuition sur les différentes manières de voir la dérivabilité et la dérivation.

Je vous distribue une page d’un article de Bill Thurston, médaillé Fields (équivalent du prix Nobel), sur la compréhension d’un concept mathématique, qui a souvent plusieurs facettes, chacune avec ses évidences, et ses questions.

Il parle de la dérivation, et des différentes manières d’y penser.

Infinitésimale : le rapport d’un accroissement infinitésimal de la fonction sur l’accroissement infinitésimal de la variable.

Symbolique : on apprend les formules pour les fonctions classiques, et on les utilise.

Logique : la définition en “ $\epsilon - \delta$ ” ...

Géométrique : la pente de la tangente au graphe de la courbe au point x_0 (exemple d’évidence/question mais qu’est-ce qu’une tangente?)

Taux d’accroissement (vitesse instantanée)

Approximation : meilleure approximation par une fonction affine, voire développement limité d’ordre 1

Microscopique : limite obtenue en zoomant sur le point.

etc...

Il ironise même en disant que sa 37eme version de la dérivation est la donnée d'une section Lagrangienne bla bla...

Thurston dit qu'il se souvient avoir passé du temps à jouer mentalement à reconcilier les unes avec les autres toutes ces intuitions. Je m'en souviens aussi personnellement. Il me semble naturel, quand on étudie les maths et qu'on les aime un peu, d'aimer jouer avec ce genre de formulations jusqu'à ce que le sens qu'elles portent devienne naturel, et dépasse la lourdeur de leur écritures. Ce genre de jeu, sans pretention, me semble en fait le ciment autour de tout ce que vous pouvez apprendre. Sans ces "jeux", je me demande comment cet apprentissage pourrait ne pas être vain, et ressembler à un catéchisme bien appris ou l'ordre des mots n'a pas plus de valeur que ce qu'en donne l'apprentissage par coeur. Un peu comme ces collégiens répétant par coeur "la distance d'un point à une droite est la longueur du plus court segment reliant ce point à un point de la droite; si un point O est extérieur à une droite D , et si un point M est sur D tel que la droite AM est perpendiculaire à la droite D alors la distance de A à D est égale à la distance de A à M ", sans jamais faire le dessin qui illumine ces phrases absconses.

Le cours s'inscrit précisément dans cette perspective (pas de cette 37eme version mais :) de pousser l'une des compréhensions qu'on a d'un concept dans un cadre où il passe bien, et où il sert à de nouvelles choses.

Rappelons ce qu'on a fait de beau avec la dérivation.

* Etudes de fonctions. On dresse un tableau de variation, pour savoir où la fonction croît ou décroît, on calcule quelques valeurs en certains points qui jouent un rôle important, et on a déjà souvent un portrait assez précis du graphe de la fonction. On peut affiner avec la dérivée seconde, qui donnera des informations sur la convexité, la concavité.

* Approximations de fonctions compliquées par des fonctions simples (tangentes, Taylor, développements limités)

* La recherche d'extrema. C'est la raison historique : on veut savoir quand une quantité est maximale ou minimale ; avec un peu de chance, c'est quand la dérivée s'annule... Evidemment il y a des exceptions, et il faut finir le travail à la main... (Illustration : motivation de Leibniz sur le problème de la loi de Descartes en optique).

* Les equations différentielles. Il peut arriver que ce qu'on sait d'une quantité concerne son évolution, et qu'on en déduise une équation melant cette quantité et sa variation : une equa-diff. Parfois, on sait même les résoudre...

2.1.1 Différentiabilité, classe C^1

[Lau, II-1 (1-2)] [Gou, V-1] Comparaison aux cas précédents. On se muni de E, F deux espaces vecteoriels normés, qu'on supposera de dimension finie dans ce cours (typiquement il s'agit de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n).

Soit U un ouvert de E . (rappel : un ouver est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire qu'en chaque point, on peut trouver une petite boule incluse dans U).

On dit que $f : U \rightarrow F$ est continue si ... (pour toute suite a_n de U convergeant vers $a \in U$, $f(a_n)$ converge vers $f(a)$).

Définition 2.1.1 *On dit que $f : U \rightarrow F$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L : E \rightarrow F$ telle que*

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

Autrement dit : f est différentiable si elle admet un DL d'ordre 1 avec un terme linéaire en h .

Dans ce cas, la différentielle de f au point a est l'application linéaire L . On la note $df(a)$ ou Df_a ou df_a , (ou même certaine fois $f'(a)$).

Dans le cas d'une application différentiable en tout point de U , on a une application $(df) : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ qui donne la différentielle en un point de U (on l'appelle parfois l'application dérivée). Si on muni $\mathcal{L}(E, F)$ d'une de ses normes, on peut parler de la continuité de cette application, ou meme de sa différentiabilité.

On dit que f est de classe C^1 si (df) est continue.

Proposition 2.1.1 *La différentiabilité implique la continuité.*

Facile. En dimension infinie, il aurait fallu faire attention à prendre L continue.

Proposition 2.1.2 *Soit f comme précédemment. Si la différentielle existe en un point elle est unique.*

En effet si L_1 et L_2 conviennent, alors $(L_1 - L_2)(h) = o(\|h\|)$. Prenons $K = \|L_1 - L_2\|_{op}$. Comme nous sommes en dimension finie, on a $\exists h_0 \neq 0, \|(L_1 - L_2)(h_0)\| = K\|h_0\|$ et même, $\forall \lambda > 0, \|(L_1 - L_2)(\lambda h_0)\| = K\|\lambda h_0\|$. Si K est non nul, ce n'est pas un $o(\|\lambda h_0\|)$, donc $K = 0$ et $L_1 = L_2$.

Proposition 2.1.3 *(Cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et $x_0 \in \mathbb{R}$. La différentielle de f en x_0 est l'application linéaire $df_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$. Son graphe est la droite vectorielle portant la tangente au graphe de f en x_0 .*

Remarques sur les espaces vectoriels et les espaces affines.

On peut se placer “abstraitement” dans le cas où $f : E \rightarrow F$ où E et F ont des structures d'espaces affines, plutôt que d'espaces vectoriels. En effet, il est naturel de considérer que f envoie des points sur des points (plutôt que des vecteurs). En revanche, df_x est définie sur l'espace vectoriel sous-jacent à E à valeur dans l'espace vectoriel sous-jacent à F . En effet, elle concerne des vecteurs $\vec{x}\vec{y}$, et encore des petits vecteurs (dessin). On devrait considérer en fait que l'application df_x prend des vecteurs “issus” de x , ou même “tangents” à l'espace E en x , et les envoie sur des vecteurs “issus” de $f(x)$, ou encore “tangents” à l'espace F en $f(x)$.

2.2 Dérivées partielles

2.2.1 Dérivées partielles, Jacobienne

[Lau, II-1 (3)] [Gou, V-1].

Si l'on se donne *une* direction par un vecteur v de E , on peut tenter de dériver selon v . Il s'agit de regarder la fonction

$$t \mapsto f(a + tv)$$

et de la dériver en $t = 0$ si elle est dérivable. Si oui, on dit que f est dérivable selon v , et le vecteur de F obtenu est la dérivée selon v , noté $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Proposition 2.2.1 *Si f est différentiable en a , alors elle admet une dérivée selon tout vecteur non nul, et de plus $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (df(a))(v)$.*

Commentaire : $(df)(a)$ est une application linéaire, et donc $(df(a))(v)$ est bien un vecteur de F .

Preuve : on a $f(a + tv) = f(a) + (df(a))(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t(df(a))(v) + o(\|tv\|)$.

Le taux d'accroissement vaut $(f(a + tv) - f(a))/t = (df(a))(v) + o(\|v\|)$, ce qu'on voulait.

Dans le cas de $E = \mathbb{R}^n$, on peut dériver selon les vecteurs de la base canoniques (e_1, \dots, e_n) . Si l'on note les coordonnées des vecteurs sous la forme (x_1, \dots, x_n) , l'usage est de noter $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Proposition 2.2.2 *Dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application différentiable en a , dont les coordonnées sont notées $f = (f_1, \dots, f_m)$, alors la matrice de $(df)(a)$ possède m lignes et n colonnes vaut*

$$\text{Mat}(df)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a), & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a), & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a), & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

On appelle cette matrice la matrice Jacobienne, et son déterminant est le Jacobien.

On applique la proposition précédente a chaque vecteur de base, pour retrouver les différentes colonnes de la matrice.

2.2.2 Exemples et contre-exemples usuels

[Lau, II-1 (3)] [Gou, V-1]

Avoir des dérivées partielles ne suffit pas à être différentiable, ni même continu.

Considérons $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$. Alors on ne peut pas la prolonger par continuité en 0. En effet, si on prend les deux suites : $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et $v_n(\frac{1}{n}, 0)$, on a $f(u_n) = \frac{1}{2}$ et $f(v_n) = 0$.

En revanche, pour chaque $v = (a, b)$ on peut considerer $f(tv) = \frac{abt^2}{(a^2+b^2)t^2}$. A noter que si l'on pose $f(0, 0) = 0$, les derivées partielles selon les deux vecteurs de base sont bien définies, et nulles en $(0, 0)$. En revanche l'application qui a (x, y) associe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Concernant les exemples, on peut citer l'inverse de la projection stereographique (de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3), et la paramétrisation d'un tore de révolution.

Si Σ est la sphere $\Sigma = \{x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$, et si pi est la projection stereographique, on a une formule pour f son inverse :

$$f(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 4}(4u, 4v, 2(u^2 + v^2))$$

En effet il suffit de verifier que ce point est bien sur la sphere, et que les points $N, (u, v, 0)$ et $f(u, v)$ sont alignés (N est le pôle nord... dessin...)

On calcule les dérivées partielles facilement. On peut en donner une interpretation en terme d'accroissement dans les directions de coordonnée u et v .

Grace à ces formules explicites, on voit que les fonctions derivées partielles sont continues (en (u, v)), et cela nous assurera bientôt que la différentielle de f est facilement explicitable.

On peut définir le plan tangent à la surface... On verra une autre manière de le trouver grace au gradient de $g : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ (le faire ici?)...

Autre exemple explicite : le tore de révolution

$$f(\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

(dessin, dérivées partielles, interprétation comme “vecteurs tangents” au tore en question...)

2.3 Théorie différentielle

2.3.1 Formule de composition

[Lau, II-1 (5)] [Gou, V-1]

Proposition 2.3.1 *Soient E, F, G des e.v.n, U un ouvert de E , V un ouvert de F . Soient $f : U \rightarrow F$, et $g : V \rightarrow G$, et $a \in U$. On suppose que $f(a) \in V$. (dessin)*

On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = (dg(f(a))) \circ (df(a)).$$

Remarque : dans le cas de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , c'est en fait la formule de dérivation des composées de fonctions bien connue.

Démonstration. On pose $k = f(a+h) - f(a)$, et on écrit les DL que l'on compose.

Les deux DLs :

$$g(f(a) + k) = g \circ f(a) + (dg(f(a)))(k) + o(\|k\|)$$

par définition de dg .

$$k = (df(a))(h) + o(\|h\|)$$

par définition de df .

On en déduit que $\|k\|/\|h\|$ reste borné au voisinage de $h = 0$, et que donc $o(\|k\|)/\|h\|$ tend vers 0. Ainsi un $o(\|k\|)$ est un $o(\|h\|)$.

On revient à la première formule (au premier DL), et on fait la composition

$$g(f(a+h)) = g \circ f(a) + (dg(f(a)))((df(a))(h) + o(\|h\|)) + o(\|h\|)$$

Il vient

$$g(f(a+h)) = g \circ f(a) + dg(f(a)) \circ df(a)(h) + dg(f(a))(o(\|h\|)) + o(\|h\|)$$

On majore $dg(f(a))(o(\|h\|))$ par $\|dg(f(a))\|_{op} \times o(\|h\|)$, et on a le DL correct qui fait apparaître $dg(f(a)) \circ df(a)$ comme différentielle de $g \circ f$ en a .

Grace à la formule explicite on obtient :

Corollaire 2.3.1 *Si f et g sont de classe C^1 , alors $g \circ f$ est de classe C^1*

Exemple : dérivation le long d'un chemin (ou d'une courbe).

On suppose que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ est une courbe paramétrée, et que $f : E \rightarrow F$ est différentiable.

Alors

$$(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0))(\gamma'(0))$$

dans le cas ou $F = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}$, on peut encore écrire

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(0)) \frac{d\gamma}{dt}(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(0)) \frac{d\gamma}{dt}(0)$$

2.3.2 Inégalité des accroissements finis et applications

[Lau, II-1 (7 — 12)] [Gou, V-3]

Proposition 2.3.2 *Soit F un espace vectoriel normé. Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ et $g[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues différentiables sur $]a, b[$. On suppose que*

$$\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq g'(t).$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Comparer au Lemme de Gronwall qui dit que si $\|\dot{\gamma}(t)\| \leq h(\|\gamma(t)\|, t)$ et si ρ solution de $(\dot{y} = h(y, t))$ tq $\rho(t_0) = \gamma(t_0)$ alors $\|\gamma\| \leq \rho$ à droite de t_0 . Il s'agit d'une application de ce résultat au cas $h(y, t) = g'(t)$ et $\gamma(t) = f(t) - f(a)$ et $\rho(t) = g(t) - g(a)$. On vérifie bien les hypothèses, et la conclusion est exactement le résultat voulu.

Proposition 2.3.3 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ à dérivées partielles continues. Alors f est dérivable de classe C^1 sur U .*

On va le faire pour $m = 2$.

Faisons un dessin : on a dans l'espace des paramètres, trois points $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0), (x_0 + h, y_0 + k)$. Dans l'espace image on a l'image de ces trois points, et deux vecteurs "tangents" au courbes de coordonnées : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$. On peut heuristiquement dire que le trajet de $f((x_0, y_0))$ à $f((x_0 + h, y_0))$ le long de l'image de la courbe de coordonnée est "presque" $h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$ est "presque" $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, et que le trajet de $f((x_0 + h, y_0))$ à $f((x_0 + h, y_0 + k))$ est "presque" $k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$. Si on pense au premier ordre : les "presques" deviennent des égalités, à petit o près, et il vient "l'égalité" (à petit o près) $f((x_0 + h, y_0 + k)) = f((x_0, y_0)) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (+o(h, k))$, c'est à dire ce qu'on souhaiterait. Il est temps de formaliser tout cela : le deuxième "presque" viendra de la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$, et les deux autres "presque" viendront de l'IAF appliquée aux courbes de coordonnées.

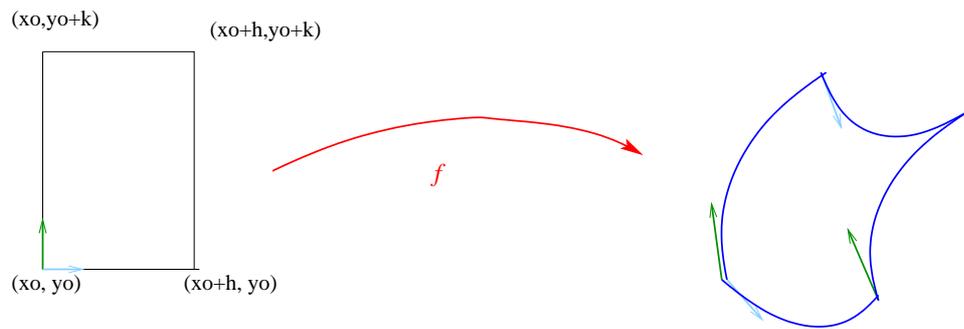


FIGURE 1 – Les dérivées partielles nous donnent les images des vecteurs de la base canonique à gauche...

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue donc $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tels que

$$\sup\{|h|, |k|\} \leq \delta \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right\| < \epsilon$$

L'IAF appliquée à $t \in [0, 1] \mapsto f(x_0 + h, y_0 + tk) - f(x_0 + h, y_0) - tk \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$ donne

$$\left\| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) \right\| \leq 2\epsilon |k|$$

comme ϵ peut être pris tendant vers 0 si $|k| + |h|$ tend vers 0, c'est donc un $o(|k| + |h|)$.

Par définition de la dérivée partielle, $\|f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\|$ est un $o(|h|)$.

Aussi : $\|k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\| \leq |k| \epsilon = o(|h| + |k|)$.

En additionnant les trois inégalités, il vient

$$\|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\| = o(|h| + |k|)$$

ce qui prouve la différentiabilité.

On peut alors écrire la différentielle en terme de dérivées partielles, et l'expression est continue.

Proposition 2.3.4 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable. On suppose que $\|df(a)\| \leq k$ pour tout $a \in U$. Soit $[a_1, a_2]$ un segment contenu dans U (dessin).*

Alors

$$\|f(a_1) - f(a_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k \|a_1 - a_2\|_{\mathbb{R}^m}.$$

En particulier, f est k -lipschitzienne sur toute boule de U , et sur toute partie convexe de U .

Rappel : un convexe contient tous les segments issus de deux de ses points.

Idée de contreexemple pour les parties non convexes... une pente douce sur une forme de grand fer à cheval... Le segment entre les deux extrémités est court, mais l'écart de valeur de la fonction est grand.

Preuve. On applique l'IAF à

$$t \in [0, 1] \mapsto f(x_0 + t(x_1 - x_0)).$$

Corollaire 2.3.2 *Si f est de classe C^1 , elle est localement lipschitzienne.*

Comme df est continue, sa norme est localement bornée.

Proposition 2.3.5 *Si U est connexe par arc (rappel de def!) et si df est identiquement nulle (c'est à dire l'application linéaire nulle) alors f est constante.*

Préliminaire topologique : entre chaque paire de points de U supposé ouvert, connexe par arc, il existe un chemin affine par morceaux.

Une fois ce préliminaire établi, on applique la proposition de contrôle sur chaque segment.

preuve du préliminaire : on utilise un arc $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ reliant x à x' , ces deux points. Comme $\gamma([0, 1])$ est compact (image continue d'un compact), il existe r tel que chaque $\gamma(t)$ a un voisinage de rayon r autour de lui contenu dans U (on a déjà vu cela dans le chapitre equadiff). Comme γ est uniformément continue (car continue sur un compact), il existe δ tel que $\gamma([t - \delta, t + \delta]) \in B(\gamma(t), r) \subset U$. Soit n tel que $1/n < \delta$, alors le segment entre $\gamma(k/n)$ et $\gamma((k+1)/n)$ sont contenus dans $B(\gamma(k/n), r) \subset U$. On a donc notre suite de segments.

Proposition 2.3.6 *Soit U un ouvert de E et f_n une suite d'applications $f_n : U \rightarrow F$.*

On suppose que df_n converge uniformément vers g .

On suppose que f_n converge simplement vers $f : U \rightarrow F$.

Alors f est différentiable sur U et $df = g$.

Rem : si U connexe (et F complet, par ex, de dim finie sur \mathbb{R}), on peut affaiblir la deuxième hypothèse en ne supposant que la convergence en un point. En effet, l'IAF assure la convergence simple en tout point.

Preuve : Soit $a \in U$ on veut montrer que

$$f(x) - f(a) - (g(a))(x - a) = o(\|x - a\|)$$

Par accroissements finis, on a

$$\|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(a)\| \leq \sup_{\xi \in U} \|(df_m - df_n)(\xi)\|_{op} \|x - a\|$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ il vient

$$\|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(a)\| \leq \sup_{\xi \in U} \|(g - df_n)(\xi)\|_{op} \|x - a\|$$

Pour n assez grand :

$$\|(f(x) - f_n(x)) - (f(a) - f_n(a))\| \leq \epsilon \|x - a\|$$

et

$$\|(df_n - g)(a)(x - a)\| \leq \|(g - df_n)(a)\|_{op} \|x - a\| \leq \epsilon \|x - a\|$$

D'autre part, par définition de df_n ,

$$\|f_n(x) - f_n(a) - (df_n(a))(x - a)\| = o(\|x - a\|)$$

Par inégalité triangulaire, en additionnant les trois précédentes inégalités,

$$\|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| \leq \epsilon\|x - a\| + o(\|x - a\|).$$

Comme on peut prendre ϵ arbitrairement petit, on a le résultat.

2.4 Ordre 2 (et plus)

2.4.1 Différentielle et dérivées partielles d'ordre 2

On a vu ce que c'est qu'être C^1 : c'est avoir une application dérivée (celle qui en chaque point donne la différentielle) continue.

Remarque : pour cela on a besoin d'une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, qui est un espace de dimension finie, donc sur lequel toutes les normes sont équivalentes.

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, et $a \in U$.

On suppose que f est différentiable sur U , et on note $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ son application dérivée.

On suppose que df est différentiable en a .

On note $d^2f(a)$ la différentielle de df en a . C'est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$, on l'appelle la différentielle d'ordre 2 de f , au point a .

Dérivées partielles d'ordre 2.

Si f est définie sur un ouvert de \mathbb{R}^m , on peut parler des dérivées partielles, et même de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

défini comme suit.

Rappel :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + te_i)$.

$$a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est une application de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n . On peut donc à nouveau prendre sa dérivée partielle en a selon e_j . On la note

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Proposition 2.4.1 Une application définie sur un ouvert de \mathbb{R}^m est de classe C^2 si et seule-

ment si ses dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre 2 et sont continues.

On sait déjà que si les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre 2 et sont continues, alors f est C^1 . Montrons que df a ses dérivées partielles continues, et on pourra appliquer de nouveau ce critère pour conclure.

On doit étudier (dans l'espace des applications linéaires de E dans F) l'existence de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(a + te_i) - df(a)}{t}$$

Or une suite d'applications linéaires sur \mathbb{R}^m converge si et seulement si leur valeur en chaque vecteur de la base canonique converge.

On doit donc étudier l'existence de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(a + te_i)(e_j) - df(a)(e_j)}{t}$$

mais

$$\frac{df(a + te_i)(e_j) - df(a)(e_j)}{t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{t}$$

qui converge donc vers $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

On a donc une expression continue en a de $\frac{\partial}{\partial x_i} df(a)$, ce qu'on voulait.

2.4.2 Lemme de Schwarz

[Lau, II-2 (1 — 6)], [Lau, II-2 (7)] selon le temps. [Gou, V-1]

Rappel : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, et $a \in U$, disons de classe C^2 .

On a noté $d^2f(a)$ la différentielle de df en a . C'est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 2.4.2 *Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), F) \simeq \mathcal{BL}(E \times E, F)$$

On verra donc la différentielle seconde comme application bi-linéaire de $E \times E$ dans F .

Concretement :

$$(d^2 f(a))(e_i, e_j) = \left(\frac{\partial}{\partial e_i} \left(\frac{\partial f}{\partial e_j} \right) \right) (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} (a)$$

Théorème 2.4.1 (Le “lemme de Schwarz”) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, ayant des dérivées partielles secondes continues en un point a .

Alors la différentielle seconde en a est une application bi-linéaire symétrique.

Autrement dit : pour tout i, j ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} (a).$$

Preuve : Dans le cas d’une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On se place en $a = (x_0, y_0)$. On prend $h > 0$ et $k > 0$ tels que $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset U$.

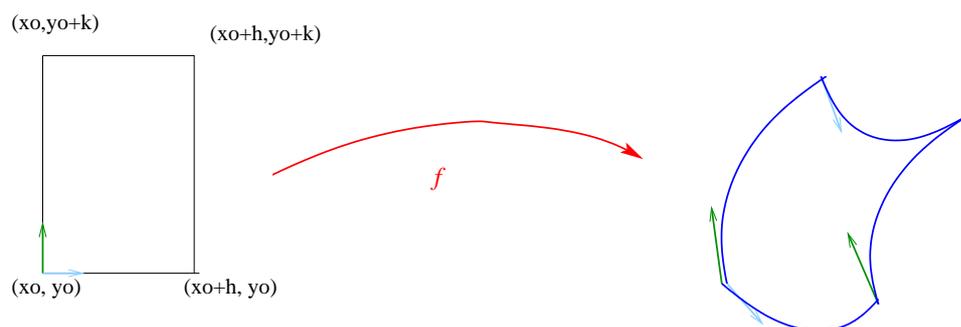


FIGURE 2 – Le lemme de Schwarz, ou “comment un même dessin illustre deux théorèmes différents”

Dessin : dans l’espace des paramètres, on a un brave rectangle. (En fait, on peut prendre $h = k$, de sorte qu’on voit un carré, mais alors on ne différencie plus les rôles). Dans l’espace d’arrivée, il est déformé, les lignes de coordonnées sont courbées, mais pas trop, car au premier ordre, c’est encore un rectangle. Sur le côté horizontal on voit le taux d’accroissement par rapport à la première variable, en (x_0, y_0) en bas, et en $(x_0, y_0 + k)$ en haut. Si on fait la différence entre ces vecteurs (et qu’on divise par k), on voit le taux d’accroissement par rapport à la seconde variable de $\partial f / \partial x$ en (x_0, y_0) . C’est donc bien, semble-t-il, une estimation de $\partial^2 f / (\partial y \partial x)$ en (x_0, y_0) . Au premier ordre, cette quantité a l’air d’être $\frac{1}{hk} (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0))$. Ça c’était la comparaison des deux côtés horizontaux.

Mais si l'on compare les deux côtés verticaux, bien sur, le meme calcul se fait, et l'approximation trouvée est la même...

Il s'agit de rendre cela rigoureux. Et pour cela, il faut prendre un developpement à l'ordre 2 plutot qu'à l'ordre 1 (car on va diviser par h puis par k ...). Le calcul se fait sans histoire, sauf à la fin, en laquelle pour conclure à l'égalité des derivees secondes croisées. En effet, pour paseer correctement à la limite, il convietn de prendre $h = k \rightarrow 0$.

Voici la preuve donnée par Laudenbach.

On pose

$$\delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$

et

$$\phi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

On a alors

$$\delta(h, k) = \phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$$

Or ϕ est dérivable, on peut donc appliquer l'IAF qui dit que $\exists \theta_1 \in]0, 1[, \delta(h, k) = h\phi'(x_0 + h\theta_1)$.

On ecrit cela

$$\delta(h, k) = h \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right).$$

Maintenant $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$ est dérivable, l'IAF encore donne : $\exists \theta_2 \in]0, 1[$,

$$\delta(h, k) = hk \times \frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k).$$

Le meme travail en prenant la fonction $\psi : y \mapsto f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ à la place de ϕ permet d'obtenir $\exists \theta_3, \theta_4$,

$$\delta(h, k) = hk \times \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k).$$

Ainsi

$$\frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k).$$

En faisant tendre h et k vers 0, tous les θ_i y sont entraînés, et il vient le résultat attendu : l'égalité des dérivées partielles secondes croisées au point a .

Vocabulaire : si $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, la différentielle seconde en un point a est une *forme* bilinéaire symétrique. Elle est donc représentée dans une base de E par une matrice carrée. On dit que cette matrice est la Hessienne de f en a . Cette matrice est précisément

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$$

Si $E \simeq \mathbb{R}^2$, cette matrice est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

2.5 Généralisation à l'ordre r

2.5.1 Différentielle d'ordre r , dérivées partielles d'ordre r

[Lau, II-2 (7,8)],

On dit qu'une application f est C^r si cette application dérivée $U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est C^{r-1} .

On dit qu'une application f est C^∞ si elle est C^r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exemples : toute application linéaire est C^∞ .

Dérivées partielles d'ordre r . Si f est définie sur un ouvert de \mathbb{R}^m , on peut parler des dérivées partielles, et même de

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a)$$

défini comme suit.

Rappel :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + te_i)$.

$$a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est une application de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n . On peut donc à nouveau prendre sa dérivée partielle en a selon e_j . On la note

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Ainsi de suite on peut définir, le cas échéant,

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a)$$

comme étant la dérivée partielle (si elle existe) de

$$a \mapsto \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a)$$

selon le vecteur e_{i_1} .

On peut aussi définir en chaque point a , $d^r f(a)$ la différentielle r -ième en a , qui est alors une application r -fois-linéaire de E^r dans F .

On a

$$(d^r f(a))(h_1, \dots, h_r) = \left(\frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{\partial}{\partial h_2} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial h_r} f \right) \dots \right) \right) \right) (a)$$

Proposition 2.5.1 Une application définie sur un ouvert de \mathbb{R}^m est de classe C^r si et seulement si ses dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre r et sont continues.

Le Lemme de Schwarz (généralisé, si l'on veut) dit que cette application est symétrique : elle ne change pas de valeur si l'on permute ses variables.

Autrement dit : on peut écrire les dérivées partielles multiples sans se soucier de l'ordre du dénominateur.

Exemple

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe C^r , et on suppose que U contient un segment $[a, a + h]$ (dessin).

Alors si on considère $g : t \mapsto f(a + th)$ définie sur $[0, 1]$, on peut écrire :

$$\frac{d^r g}{dt^r}(t) = ((d^r f)(a + th))(h^{(r)})$$

où $h^{(r)}$ est le vecteur $(h, h, \dots, h) \in E^r$.

Supposons que $E \simeq \mathbb{R}^n$ et munissons nous de la base canonique donnée par cette identification. Notons $h = \sum_i h_i e_i$. On a alors (on a pris $t = 0$)

$$((d^r f)(a))(h^{(r)}) = \sum_{(i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_r}.$$

Remarque : dans cette expression le même terme apparaît plusieurs fois. On pourrait faire intervenir des coefficients binomiaux pour remédier à cela...

2.5.2 Formule de Taylor

[Lau, II-2 (9, 10)], [Gou, V-1]

On suppose que F est complet (par exemple parce qu'il est de dimension finie)

Avec les notations précédentes, on a la formule

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{1}{r!} \frac{d^r g}{dt^r}(0) + \dots$$

Retraduit en fonction de f , cela donne :

Proposition 2.5.2 (*Taylor*)

On a

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \cdots + \frac{1}{r!} d^r f(a)(h^{(r)}) + \\ + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} [d^r f(a+th) - d^r f(a)](h^{(r)})$$

et le reste est un $o(\|h\|^r)$.

2.6 Extremas “libres”, points critiques, et signe du Hessien $rt - s^2$

[Gou, V-2]

Dans cette partie, on considère $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (l'espace d'arrivé est \mathbb{R}).

On dit que f admet un maximum local en a s'il y a un voisinage de a pour lequel f est majorée par $f(a)$. Idem minimum. L'un ou l'autre : extremum.

Proposition 2.6.1 *Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point a , et si f est différentiable en a , alors $df(a) = 0$ (l'application linéaire nulle), autrement dit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout i .*

Preuve : Supposons que l'extremum soit un maximum. df est une forme linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Si df est non nulle, il y a une direction h ou elle est strictement positive. Un DL à l'ordre 1 (c'est à dire la définition de df) donne que $f(a)$ est strictement inférieur à $f(a + th)$ dès que $t > 0$ est assez petit.

Vocabulaire. Un point a dans l'ouvert U en lequel $df(a)$ est l'application nulle est un point critique.

Rappel : formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques associées, formes positives, formes définies positives.

Théorème 2.6.1 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et a un point critique (i.e. $df(a) = 0$).*

Considérons la forme bilinéaire symétrique $d^2f(a)$ (la Hessienne).

Si f admet un minimum en a , alors $d^2f(a)$ est positive.

Si $d^2f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum en a .

On a des énoncés similaires pour les maximas.

Preuve :

On écrit le développement de Taylor (Young) à l'ordre 2 pour $f(a + h)$.

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a)(h) + o(\|h\|^2)$$

Si f a un minimum en a , on a $h \mapsto \frac{1}{2}d^2f(a)(h) + o(\|h\|^2) \geq 0$. Si la forme quadratique $Q = \frac{1}{2}d^2f(a)$ n'est pas positive, il existe h_0 tel que $Q(h_0) < 0$. On a alors $Q(\lambda h_0) = \lambda^2 Q(h_0) = (\lambda \|h_0\|)^2 \times \frac{Q(h_0)}{\|h_0\|^2}$ ce qui n'est pas un $o(\lambda h_0)$.

Si Q est définie positive, on obtient que $f(a)$ est un minimum strict.

Exemple Formulation explicite en dimension 2.

$$d^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = M$$

On a en principe différents cas. On diagonalise la forme : il existe P tel que $P^t M P = \text{Diag}(\ell_1, \ell_2)$. Ainsi $\det(M) \times \det(P)^2 = \ell_1 \ell_2$.

On regarde $\det(M) = rt - s^2$.

On lit ainsi que si $\det(M) < 0$, M n'est ni positive ni négative, et donc f n'admet ni minimum ni maximum.

Au contraire si $\det(M) > 0$, M est définie positive ou définie négative. Ainsi f admet un minimum ou un maximum local.

2.7 Théorème d'inversion locale

[Lau, II-4 (1 — 6)] [Gou, V-3]

On est en dimension finie (en fait dans des espaces de Banach ça va aussi)

Définition 2.7.1 *On dit que $f : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme si f est continue bijective, et si sa réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$ est continue.*

On dit que $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de classe C^r si f est un homéomorphisme différentiable de classe C^r , et f^{-1} aussi.

Exemples, exemples de ce qui pourrait arriver...

Proposition 2.7.1 *Lorsque f est un C^1 -diffeo, alors*

$$d(f^{-1})(f(a)) = ((df)(a))^{-1}$$

Provient de la formule de composition des différentielles.

Exemple : $x \mapsto x^3$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est bijective C^1 , de réciproque continue mais pas différentiable en 0.

Cependant c'est "le pire" qui puisse arriver :

Proposition 2.7.2 *Si $f : U \rightarrow V$ est bijective, C^r et si f^{-1} est continue et différentiable, alors f^{-1} est C^r .*

Un utilise la formule explicite et le fait que $u \mapsto u^{-1}$ de $Isom(E, F)$ dans $Isom(F, E)$ est C^∞ (cf TD? on a une formule matricielle qui le dit).

Le théorème d'inversion locale qui va suivre donne un critère pour avoir un C^1 -diffeo, et la régularité au delà est donnée par la prop précédente.

Théorème 2.7.1 *Soient E, F des ev de dim finie, et U, V des ouverts de E, F .*

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe C^1 , et $a \in U$ tel que $df(a)$ soit inversible (en tant qu'application linéaire).

Alors il existe un voisinage U' de a dans U tel que $f|_{U'}$ soit un C^1 -difféomorphisme de U' sur $V' = f(U')$.

(De plus, si f est C^r alors $f^{-1}|_{V'}$ est C^r .)

D'abord on peut supposer que $F = E$ et $df(a) = Id$ (en composant tout par l'isomorphisme $df(a)^{-1}$) et que $a = f(a) = 0$, par translation.

Il s'agit de montrer qu'il existe U', V' voisinages de 0, tels que $f|_{U'} : U' \rightarrow V'$ soit un diffeo.

On va commencer par montrer que c'est un homeo; c'est déjà non trivial.

Pour cela, on va inverser f , c'est à dire résoudre l'équation $f(x) = y$. (exprimer x en fonction de y)

On pose $\phi(x) = f(x) - x$ et $T_y(x) = y - \phi(x)$ (dessin graphe : en jaune : l'identité, en rouge : le graphe de f , en bleu, le vecteur $\phi(x)$, en violet : le choix de y_0 , et le graphe de T_{y_0} (on reporte le vecteur bleu "par le haut") en vert : le point d'intersection d u jaune et du violet : ce la se passe à la préimage de y_0).

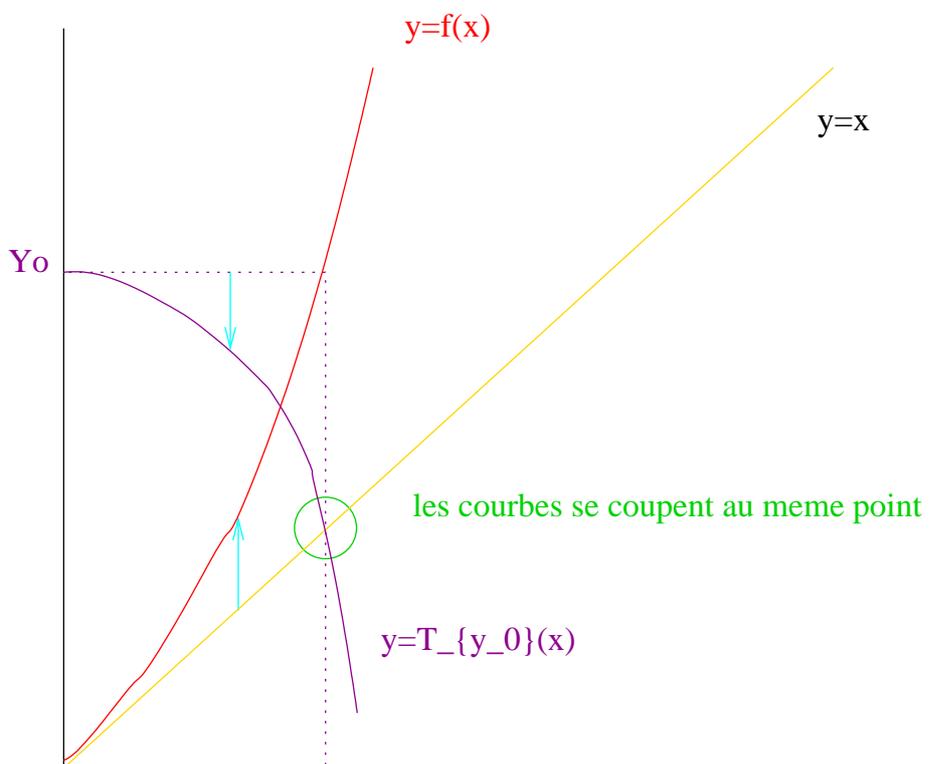


FIGURE 3 – Jaune, rouge, bleu, violet...

Observation : pour tout x , $T_{f(x)}(x) = x$. Et même, à y fixé, l'ensemble des points fixes de T_y est précisément l'ensemble des préimages de y par f .

On cherche alors à définir U' et à montrer que, pour chaque $y \in U'$, T_y a un unique point fixe dans U' , et qu'il varie continuellement en y .

L'outil adapté est le théorème de point fixe de Picard (dépendant d'un paramètre). Mais

il y a des hypothèses à vérifier pour pouvoir l'appliquer : pour tout y dans V' , T_y doit être uniformément contractante sur U' , et aussi T_y doit envoyer un fermé de U' dans lui-même.

Nous allons donc montrer qu'on a ces deux propriétés sur un petit voisinage de 0.

Le lemme suivant va aider à définir "quel" voisinage de 0 est adapté.

Lemme 2.7.1 *Il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre 0 de rayon r (notée B) possède les propriétés suivantes.*

- la boule fermée est contenue dans U
- $\forall x \in B, \|d\phi(x)\| \leq 1/2$
- $\forall x \in B, df(x)$ est inversible (donc dans $GL(E)$).

Il suffit de vérifier les 3 points séparément, et de prendre la plus petite boule.

Le premier point est clair (U est ouvert).

$d\phi$ est continue, et vaut 0 en 0. Comme la norme est continue, le 2ème point est assuré.

df est continue et inversible en 0. Comme le déterminant est continue, cela nous assure le troisième point.

Le lemme est établi.

Continuons la preuve du théorème. Nous pouvons maintenant obtenir facilement la contractivité de T_y (pour tout y). L'inégalité des accroissements finis donne

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

dans B . En particulier T_y est 1/2-contractante.

Maintenant il faut montrer que T_y envoie $\overline{B_r}$ dans lui-même. Ce n'est pas vrai pour tout y , mais si $\|y\| < r/2$ cela marche. En effet : en considérant $x = x_1 \in B, x_2 = 0$, on a

$$\|T_y(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \leq \|y\| + \frac{r}{2}$$

Si $\|y\| < r/2$, $T_y(\overline{B})$ est contenue dans B .

Comme promis, on peut maintenant appliquer le théorème de point fixe de Picard si $\|y\| < r/2$: T_y a un unique point fixe dans \overline{B} , que l'on note $g(y)$, et g est continue. Un dernier détail :

il nous faudrait que $g(y)$ soit dans B plutôt que \bar{B} , mais cela est garanti par le fait qu'il se trouve dans $T_y(\bar{B}) \subset B$.

On prend alors V' la boule ouverte de rayon $r/2$ et U' sa préimage dans B par f . (dessin...)

$f|_{U'}$ est alors bijective sur V' de réciproque g . Comme g est continue, c'est un homeo. Nous avons fini cette première partie.

Il reste à montrer que $f|_{U'}$ est un difféo. Il suffit de montrer que g est différentiable en tout point de V' . (cela suffit d'après la remarque précédente l'énoncé).

Soit $x_0, x_1 \in U'$, y_0, y_1 leurs images dans V' . Par différentiabilité de f :

$$y_1 - y_0 = (df(x_0))(x_1 - x_0) + R(x_1)$$

avec $R(x_1)$ un $o(\|x_1 - x_0\|)$ si x_0 est fixe et x_1 variable tendant vers x_0 .

On obtient

$$x_1 - x_0 = (df(x_0))^{-1}(y_1 - y_0) - (df(x_0))^{-1}(R(x_1)) \quad (*)$$

Notons $R'(y_1)$ le terme tout à droite ($x_1 = g(y_1)$). On souhaite montrer que si y_1 tend vers y_0 , $R'(y_1)$ est un $o(\|y_1 - y_0\|)$. Notons que ce qu'on sait c'est que c'est un $o(\|x_1 - x_0\|)$.

Par continuité de $(df(x_0))^{-1}$ et du fait que son argument ($R(x_1)$) est bien un $o(\|x_1 - x_0\|)$, lui-même, on a

$$\exists \delta > 0, \|x_1 - x_0\| \leq \delta \implies \|R'(y_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_0\|$$

En reportant dans (*) on obtient que $\|x_1 - x_0\| = \|(df(x_0))^{-1}(y_1 - y_0)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_0\|$ dès que $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$.

On trouve alors $C = 2\|(df(x_0))^{-1}\|_{op}$ tel que $\|x_1 - x_0\| \leq C\|y_1 - y_0\|$ si $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$.

Par continuité de g , si $\|y_1 - y_0\|$ est assez petit, alors $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$ est vérifié.

On a alors $R'(y_1)$ qui est un $o(\|x_1 - x_0\|)$ et donc aussi un $o(\|y_1 - y_0\|)$

On a fini, en considérant de cet oeil nouveau la relation (*).

Corollaire 2.7.1 (Inversion globale)

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe C^1 . Si $df(a)$ est inversible pour tout $a \in U$, alors f est une application ouverte (l'image de tout ouvert est un ouvert).

Si de plus f est injective, alors f est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $f(U)$.

Par le TIL, étant donné un ouvert O , autour de chaque $x \in O$, f induit un difféo sur une petite boule (qu'on peut donc supposer contenue dans O) a valeur dans un ouvert $V(x)$ de F . Donc l'image $f(O)$ contient cet ouvert $V(x)$ qui est un voisinage de $f(x)$.

Si on suppose f injective, c'est une bijection de U dans $f(U)$. Comme elle est ouverte, la réciproque est continue. (dessin) C'est donc un homeo. Par le TIL, en chaque point, la réciproque est C^1 , donc c'est un C^1 -difféo.

Disons maintenant que la dimension de E soit n . Soit U un ouvert de E . On dit que des applications $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1 \dots n$ forment un système de coordonnées locales sur U si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (def évidente?) est un C^∞ -difféo.

dessin.

Théorème 2.7.2 *(f_1, \dots, f_n) est un système de coordonnées locales au voisinage de a si et seulement si les n formes linéaires $df_i(a)$ sont indépendantes.*

rappel : forme linéaire.

c'est une application du TIL.

Exemple : dans \mathbb{R}^2 soit $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ et $f_2(x, y) = y$. A quelle condition sur a, b , ces fonctions constituent-elles un système local de coordonnées en (a, b) ? On calcule les différentielles grâce aux dérivées partielles, et on obtient la condition facilement... Intuition derrière cela? Dessinons les lignes de niveau, et observons l'allure du quadrillage en un point autorisé et en un point interdit...

2.8 Théorème des fonctions implicites

[Lau, II-5 (1 — 3)] [Gou, V-3]

2.8.1 Le théorème

Au lieu de résoudre $y = f(x)$ on veut résoudre en y une équation du genre $f(x, y) = 0$.

Exemple :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

On se place dans le contexte suivant. $f : U \times V \rightarrow F$ de classe C^1 avec U, V des ouverts d'ev E_1, E_2 (de dim finie).

On note x la variable dans U et y la variable dans v . On peut alors parler (avec un léger abus, ou une définition supplémentaire) de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ qui sont des éléments de $\mathcal{L}(E_1, F), \mathcal{L}(E_2, F)$ respectivement. (Ce sont les différentielles en a de la composition de $x \mapsto (x, b)$ avec f et en b de $y \mapsto (a, y)$ avec f).

Théorème 2.8.1 *Dans la situation ci dessus, on suppose que $f(a, b) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ est inversible (en dim finie). Alors il existe des voisinages V_a, V_b de a et b et $\varphi : V_a \rightarrow V_b$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(a) = b$ et*

$$\forall x \in V_a, y \in V_b, f(x, y) = 0 \equiv y = \varphi(x).$$

De plus si f est C^r alors φ aussi.

Enfin la différentielle de φ en a est donnée par

$$d\varphi(a) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

dessins... graphe de fonction... cas du cercle.

Preuve :

Soit $g : U \times V \rightarrow U \times F$ définie par $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$. Sa différentielle est $dg(a, b) : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \times F$. Sa matrice est triangulaire par bloc, dans des bases adaptées aux produits :

$$(dg(a, b))(h, k) = \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(k) \right).$$

Il est facile d'inverser $dg(a, b)$. Par le TIL, il existe un voisinage ouvert de $(a, b) \in E_1 \times E_2$ noté W et une boule ouverte B centrée en $(a, 0) \in E_1 \times F$ de rayon $r > 0$ tels que $g|_W$ soit un C^1 -diffeo sur B . Le diffeo inverse est de la forme $g^{-1}(x, y) = (x, \phi(x, z))$ donc on a l'équivalence

$$(x, y \in W, f(x, y) = 0 \equiv \|x - a\| < r, y = \phi(x, 0)).$$

Les solutions de $f(x, y) = 0$ sont donc les points du graphe de φ définie par $\varphi(x) = \phi(x, 0)$.

Il suffit maintenant de prendre V_a, V_b tels que $V_a \times V_b \subset W$ (dessin) et de sorte que $\varphi(V_a) \subset V_b$.

La formule de $d\varphi$ est obtenue par différentiation de fonctions composées : en effet si l'on pose $\sigma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$, on différentie facilement $d\sigma_a = \begin{pmatrix} I_d \\ d\phi_a \end{pmatrix}$, et on compose les différentielles. Matriciellement, cela donne une multiplication par bloc

$$0 = df_{a, \phi(a)} \circ d\psi_a \quad 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, \phi(a)), \frac{\partial f}{\partial y}(a, \phi(a)) \right) \times \begin{pmatrix} I_d \\ d\phi_a \end{pmatrix}$$

La conclusion s'en suit.

2.8.2 Ecriture matricielle

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^p , et $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r . On note x_1, \dots, x_n les coordonnées de \mathbb{R}^n et y_1, \dots, y_p celles de \mathbb{R}^p . On note f_1, \dots, f_p les coordonnées de f .

Soit $(a, b) \in U \times V$ vérifiant $f(a, b) = 0$.

On suppose que la Jacobienne est inversible. Rappel : la Jacobienne vaut

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a, b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Alors il existe des voisinages V_a, V_b de respectivement a et b , dans respectivement U et V , et une application $\varphi : V_a \rightarrow V_b$ vérifiant :

- $\varphi(a) = b$
- φ est C^r
- $f(v, w) = 0$ si et seulement si $\varphi(v) = w$
- idem en coordonnées : ...

dessin du graphe de φ , et lieu d'annulation de f ...

Exemples : (de 1 à 4, page 69 de Laudenbach).

1 — Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 admettant 0 comme point fixe ($T(0) = 0$). On suppose que 1 n'est pas valeur propre de dT_0 . Alors 0 est un point fixe isolé : il existe un voisinage de 0 dans lequel c'est le seul point fixe.

On étudie en effet $f = T - Id$, dont la différentielle est inversible en 0. Par inversion locale, f est un difféo local en 0.

2 — Même contexte, même T . On prend $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 , et on pose $T_\lambda = T + \lambda S$. Alors il existe $\delta > 0$ et un voisinage de 0 tel que si $|\lambda| < \delta$, alors T_λ a un unique point fixe.

3 — Si P_0 est un polynôme et x_0 est une racine simple, alors si P de même degré a des coefficients suffisamment proches de ceux de P_0 , alors P a une racine simple proche de x_0 .

4 — Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 telle que $d^2f(0)$ soit une forme bilinéaire non dégénérée, alors l'origine est isolée dans le lieu critique $\{df_x = 0\}$. (Inversion locale pour l'application $x \mapsto df_x$).

2.8.3 Lien entre les théorèmes, et interprétation

[Lau, II-5 (4,6)] [Gou, V-3] Application aux courbes définies "globalement".

2.9 Extremas liés

[Gou, V-2 et V-3(2)]

Rappel : formes linéaires indépendantes.

Théorème 2.9.1 Soient f, g_1, \dots, g_r des fonctions C^1 de $U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert) dans \mathbb{R} .

Soit Γ l'ensemble $\Gamma = \{x \in U, g_i(x) = 0 \forall i\}$

Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ appelés "multiplicateurs de Lagrange", tels que :

$$df(a) = \sum \lambda_i dg_i(a)$$

Autrement dit, en les extremas locaux de $f|_{\Gamma}$ qui sont des points "réguliers" de Γ , la différentielle $df(a)$ est dans le sous-espace engendré par les différentielles des dg_i définissant Γ .

Commentaire : cela donne un critère pour trouver des candidats à être extremum local.

Puisque les formes $dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes, la famille des λ_i est unique.

Exemple : Γ un cercle dans \mathbb{R}^2 avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$.

Maximisons $f(x, y) = xy$ sur le cercle (cela a un saveur de Cauchy Schwarz)

...

Preuve.

Comme les dg_i sont indépendants, on a $r \leq n$. Si $r = n$, l'énoncé est vide, car les dg_i engendrent tout le dual. On suppose donc $r < n$.

Notre hypothèse est que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang r . Extrayons un bloc carré de taille r inversible (c'est donc une sélection de r colonnes). Nommons les variables concernées y_1, \dots, y_r .

Quitte à changer de base (par permutation), on suppose que ce sont les r dernières coordonnées de \mathbb{R}^n . Écrivons $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{R}^r$, les projetés canoniques sur les facteurs

associés à cette sélection de vecteurs de base.

Le TFI donne un voisinage U' de α et un voisinage Ω de a et une fonction $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ de U' dans \mathbb{R}^r , C^1 tels que si l'on note $g = (g_1, \dots, g_r)$ on a : pour $x \in U'$, et $(x, y) \in \Omega$

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$$

Posons $h(x) = f(x, \phi(x))$. On a supposé que h admet un maximum local en $x = \alpha$ (car $(x, \phi(x)) \in \Gamma$ en tout x et vaut a en α).

Ainsi par critère des extrêmes libres, la différentielle de h s'annule en α . Calculons cette différentielle, grâce à la formule de composition.

Posons $\sigma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$, on différencie facilement $d\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} I_d \\ d\phi_\alpha \end{pmatrix}$, et on compose les différentielles.

...

...

...

3 Théorie locale des surfaces régulières dans \mathbb{R}^3

Une application de la théorie que nous venons de voir est l'étude de paramétrisations de surfaces, plutôt que de courbes. Comme on le verra, il y a quelques différences dans le traitement de ces deux sujets, et l'une des différences fondamentale concerne le comportement de la métrique intrinsèque, inintéressante pour les courbes, et cruciale pour les surfaces.

3.1 Paramétrisations différentiables

Définition 3.1.1 $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion si elle est différentiable et que sa différentielle est injective en tout point (c'est à dire, ici de rang 2 en tout point)

(Note : on peut tout raconter sans avoir à introduire ce terme de vocabulaire – c'est peut être mieux en fait).

Définition 3.1.2 Une partie $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface régulière si, pour tout point $p \in S$, il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^3 , et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $f : U \rightarrow V$ une immersion injective telle que on ait l'équivalence $q \in S \cap V \Leftrightarrow q \in f(U)$.

Dit comme cela, ce n'est pas forcément facile à avaler.

Dessin...

Remarque : si on a une immersion, grâce au TFI on peut trouver $U' \subset U$ qui soit un voisinage d'un point de $f^{-1}(p)$, tel que $f|_{U'}$ soit injective. (exercice?)

Vocabulaire : on dit que f est une paramétrisation locale de S en p , et qu'elle donne des *coordonnées locales* sur S autour de p . (Comparez avec les coordonnées locales données par un difféo local comme dans le corollaire après le TIL)

3.1.1 Exemples

Une sphère. Une projection stéréographique donne, on l'a vu, une paramétrisation locale de S autour de tout point sauf un (le "pôle nord" de la projection). Pour établir que la sphère est bien une surface régulière on a donc besoin d'une autre (n'importe laquelle) projection stéréographique. C'est un fait qu'on ne peut pas paramétrer globalement la sphère avec une seule immersion d'un ouvert du plan.

Un tore de révolution. On part d'un cercle du plan $y = 0$ centré en $(R, 0, 0)$ de rayon $r < R$. On en fait la révolution autour de (Oz) . On peut paramétrer localement par $f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$. Mais f est injective sur le carré ouvert $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, mais sur aucun ouvert le contenant. (Dessin de ce qui manque... ou est le carré? pliage correspondant...) Pour établir que le tore de révolution est bien une surface régulière, il faut une autre application, cette fois sur $] - \epsilon, \epsilon[$ par exemple.

3.1.2 Changement de paramétrisations

Proposition 3.1.1 *Si S est une surface régulière, $p \in S$ et $f : U \rightarrow S, g : V \rightarrow S$ sont deux paramétrisations locales autour de p , et si $R = f(U) \cap g(V)$, alors $h = (f^{-1} \circ g) : g^{-1}(R) \rightarrow f^{-1}(R)$ est un difféomorphisme.*

Dessin...

Signification : deux systèmes de coordonnées locales autour d'un point d'une même surface ne diffèrent que par un difféo.

preuve : h est un homeo car composition d'homeos. Il suffit de montrer que h et h^{-1} sont différentiables.

Soient $v \in g^{-1}(R)$ et $u = h(v)$.

Notons $f(a, b) = (x(a, b), y(a, b), z(a, b))$. Comme df_u est de rang 2, on peut supposer, quitte à permuter x, y, z , que $d(x, y)_u$ inversible.

Notons alors $F(a, b, t) = (x(a, b), y(a, b), z(a, b) + t)$ (F envoie un petit cylindre autour de U dans un cylindre vertical autour de $f(U)$).

On écrit dF_u , qui est représentée par une matrice triangulaire par blocs, et on voit qu'elle est inversible.

On applique alors le TIL : F^{-1} existe sur un voisinage de $f(u)$ et est différentiable.

Or sur un voisinage de v on a $h = F^{-1} \circ g$, et donc h est différentiable, comme composée d'applications différentiables. Maintenant $h^{-1} = g^{-1} \circ f$, le même argument appliqué à g donne la différentiabilité de h^{-1} .

Définition 3.1.3 *Soient S_1, S_2 deux surfaces régulières, et $p \in S_1$. Soit $\psi : \Omega \subset S_1 \rightarrow S_2$ avec $p \in \Omega$. Supposons f, g des param locales de S_1, S_2 et que Ω soit l'image d'un ouvert par*

f. On suppose aussi que $\psi(p) \in g(V)$.

On dit que ψ est différentiable en p si $g^{-1} \circ \psi \circ f$ l'est. (On a bien contourné LE problème!)

On définit la différentielle comme l'application linéaire de $\mathfrak{S}df_r$ dans $\mathfrak{S}dg_q$ (avec $f(r) = p$ et $g(q) = \psi(p)$) définie par

$$d\psi_p = d(\psi \circ f)_r \circ (df_p)^{-1}$$

(On a aussi contourné le problème! remarquer que $(df_p)^{-1}$ est bien définie, alors que df^{-1} était problématique)

Remarque : avec cette formule la règle de composition des différentielles est encore valable. En particulier, $d\psi_p$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

3.2 Définitions implicites

3.2.1 Contexte

Proposition 3.2.1 Si $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, et si $a \in Q(\mathbb{R}^3)$ n'est l'image par Q d'aucun point critique de Q , alors $Q^{-1}(a)$ est une surface régulière.

Rappel : un point critique est un point où la différentielle s'annule.

Preuve : On applique le TFI (d'où le nom du paragraphe). Soit $p \in Q^{-1}(a)$. Ce n'est pas un point critique, et donc dQ_p est non nulle : l'une des dérivées partielles est non nulle. Disons que c'est $\partial Q / \partial z$. Le TFI assure alors qu'il existe V_{x_0, y_0} et V_{z_0} des voisinages et $\phi : V_{x_0, y_0} \rightarrow V_{z_0}$ telle que $\phi(x, y) = z$ si et seulement si $Q(x, y, z) - a = 0$.

L'application $f : (x, y) \mapsto (x, y, \phi(x, y))$ est bien injective, différentiable, et sa différentielle est bien de rang 2, comme on le voit facilement.

3.2.2 Exemples

Quadriques... Sphères, ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloides hyperboliques...

3.3 Plan tangent

3.3.1 Définition et caractérisations

Définition 3.3.1 Soit S une surface régulière, et $p \in S$. Le plan tangent vectoriel à S en p est $T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3, \exists \gamma :]-1, 1[\rightarrow S, \gamma'(0) = v\}$.

Le plan tangent affine est $p + T_p S$.

Proposition 3.3.1 $T_p S$ est un plan vectoriel. Il est engendré par $\frac{\partial f}{\partial u}(r), \frac{\partial f}{\partial v}(r)$ si f est une paramétrisation locale en p avec $f(r) = p$.

$T_p S = \ker dQ_p$ si $S = Q^{-1}(a)$ est une définition implicite.

Montrons le premier point. Il suffit de montrer que $T_p S$ est l'espace vectoriel engendré par $\frac{\partial f}{\partial u}(r), \frac{\partial f}{\partial v}(r)$, puisque ces deux vecteurs sont librement indépendants.

Si γ est une courbe tracée sur S passant par p en 0, alors $\beta = f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe tracée sur \mathbb{R}^2 passant par r en 0. On a $f \circ \beta = \gamma$ et la règle de composition des différentiations donne $df_{\beta(0)} \circ d\beta(0) = d\gamma_0 = \gamma'(0)$. Ainsi $df_{\beta(0)}(\beta'(0)) = \gamma'(0)$.

Il en découle que $\gamma'(0) \in \Im df_r$, d'où une première inclusion (tout vecteur tangent est dans l'image de df_r). Pour l'autre inclusion, soit $w = df_r(v)$. Prenons $\alpha : t \mapsto tv$ et $\gamma = f \circ \alpha$. On a $\gamma'(0) = w$. On a donc les deux inclusions.

Montrons le dernier point. Il suffit de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial u}(r)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(r)$ sont dans le noyau de dQ_p , car on sait par la formule du rang que ce dernier est de dimension 2.

On a $Q(f(u, v)) = a$ pour tout u, v . Ainsi $dQ_p \circ df_r = 0$ (l'application nulle). Il suffit d'évaluer cette identité en les vecteurs $(0, 1)$ et $(1, 0)$, pour obtenir la conclusion.

Remarque : la différentielle d'une application va du plan tangent du point source dans le plan tangent du point image (cf notre définition précédente)... Cela donne une nouvelle manière d'y penser...

3.3.2 Vecteur normal, gradient, application de Gauss

Quand on a une définition implicite $Q^{-1}(a)$ on peut parler du gradient de Q en p , c'est tout simplement dQ_p . Il s'agit d'une forme linéaire donc d'un élément du dual de \mathbb{R}^3 . Dans la base canonique, il s'exprime en vecteur ligne : $(\frac{\partial Q}{\partial x}(p), \frac{\partial Q}{\partial y}(p), \frac{\partial Q}{\partial z}(p))$. Le vecteur colonne correspondant

vit dans \mathbb{R}^3 et est normal au plan tangent pour la structure Euclidienne donnée par la base canonique.

Proposition 3.3.2 $Grad(Q)(p)^t$ est orthogonal à T_pS . il est colinéaire à $\frac{\partial f}{\partial u}(r) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(r)$.

D'un point de vu "dual", c'est évident, car $T_pS = \ker Grad(Q)(p)$. (en fait dans ce point de vue, dQ_p s'exprime ainsi, par crochet de dualité : $dQ_p(x) = \langle Grad(Q)(p), x \rangle$ ce qui ne fait que correspondre à la multiplication des matrices lignes et colonnes correspondantes.

Exemple : calcul de plans tangents d'ellipses...

Proposition 3.3.3 Un vecteur normal unitaire en un point d'une surface régulière est le choix de l'un des deux vecteurs orthogonaux à T_pS et de norme 1. Faire le choix (quand c'est possible) d'une orientation de la surface, c'est faire un choix $N(p)$ en chaque point, de sorte que $(p \mapsto N(p))$ soit continue.

On appelle une telle application une application de Gauss pour la surface.

3.4 Retrouver la métrique

On s'intéresse à la métrique "intrinsèque" d'une surface régulière.

S – surface régulière. $p \in S$. $v \in T_pS$. Dans \mathbb{R}^3 on connaît $\|v\|$.

Probleme : si f est une paramétrisation locale, et $f(r) = p$, et $df_r(w) = v$, comment retrouver $\|v\|$?

Définition 3.4.1 La matrice de la métrique de S en p , dans la paramétrisation f est donnée par

$$I_f(p) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

avec $E(r) = \langle \frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial a} \rangle$ $F(r) = \langle \frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b} \rangle$ $G(r) = \langle \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial b} \rangle$

Proposition 3.4.1 Vu comme la matrice d'un produit scalaire sur T_pS , $I_f(p)$ représente le produit scalaire ambiant de \mathbb{R}^3 exprimé dans la base $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$.

Autrement dit, si $w = (w_a, w_b)^t$, on a $\|df_r w\|^2 = Ew_a^2 + Gw_b^2 + 2Fw_a w_b$.

preuve..;

3.4.1 Longueur de chemins

Proposition 3.4.2 Si on a une courbe tracée sur une surface : $\gamma :]t_1, t_2[\rightarrow S$, la longueur d'arc : $L = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt$ vaut

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Ea'^2 + Gb'^2 + 2Fa'b'dt}$$

pour $\gamma(t) = f(\alpha(t))$, pour $f : U \rightarrow S$ une paramétrisation locale, et $\alpha(t) = (a(t), b(t))$ une courbe dans les coordonnées (\mathbb{R}^2) .

dessin...

Il est sous entendu que E, F, G dependent du point (a, b) et qu'ils sont pris en ce point dans la formule. On appelle ces coefficients, les coefs de la premiere forme fondamentale de S au point p considéré dans la paramétrisation f .

Ce qui est important c'est que à gauche on a une valeur qui ne dépend pas de f .

3.4.2 Calculs d'aires de surfaces

Définition 3.4.2 Etant donnée une surface S paramétrée par $f : U \rightarrow S$, l'aire d'une région $f(\Omega)$ est

$$A = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \wedge \frac{\partial f}{\partial b} \right\| da db$$

Dessin, et intuition de cette quantité.

Proposition 3.4.3

$$A = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \wedge \frac{\partial f}{\partial b} \right\| da db = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} da db$$

On utilise simplement que $\|v \wedge w\|^2 = \|w\|^2 \|v\|^2 - \langle v, w \rangle^2$.

Proposition 3.4.4 Cette quantité est indépendante de la paramétrisation choisie.

En effet si $A_1 = \int_{\Omega_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial a} \wedge \frac{\partial f}{\partial b} \right\| da db$ on a, pour $\psi = f^{-1} \circ g$

$$A_1 = \int_{\Omega_2} \left\| \frac{\partial f}{\partial a}(\psi(\bar{a}, \bar{b})) \wedge \frac{\partial f}{\partial b}(\psi(\bar{a}, \bar{b})) \right\| |Jac(\psi)| d\bar{a} d\bar{b}$$

C'est à dire $A_1 = \int_{\Omega_2} \left\| \frac{\partial f \circ \psi}{\partial \bar{a}}(\psi(\bar{a}, \bar{b})) \wedge \frac{\partial f \circ \psi}{\partial \bar{b}}(\psi(\bar{a}, \bar{b})) \right\| d\bar{a} d\bar{b}$.

Exemple : tore de révolution... $A = 4\pi^2 r R$. (prendre des précautions avec des epsilons...)

3.5 Application de Gauss

3.5.1 Définition (rappel)

Définition. Si on se donne f , quitte à changer de signe (d'orientation), $N(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\|}$.

Remarque : L'application de Gauss est différentiable, de la surface S dans la sphère unité.

Remarque : La différentielle dN_p va du plan tangent en p dans lui-même. (dessin)

$dN_p \gamma'(0)$ mesure comment le vecteur normal "tourne" le long du chemin γ en $\gamma(0)$.

Exemples...

3.5.2 Symétrie

Proposition 3.5.1 *La différentielle de l'application de Gauss est un endomorphisme symétrique.*

On doit montrer que, pour tout vecteurs v, w du plan tangent, on a $\langle dN_p v, w \rangle = \langle dN_p w, v \rangle$.

Par linéarité il suffit de le faire pour v, w parmi une base w_1, w_2 , et donc il suffit de montrer que $\langle dN_p w_1, w_2 \rangle = \langle dN_p w_2, w_1 \rangle$.

Prenons comme base $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$.

On a $dN_p \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial N \circ f}{\partial u}(u_0, v_0)$

... (règle de composition des différentielles)

De la même manière : $dN_p \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial N \circ f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Pour finir, on a partout $\langle N \circ f, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle = 0$. Différentions cela (selon v). $\langle \frac{\partial N \circ f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle + \langle N \circ f, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \rangle = 0$.

De même $\langle N \circ f, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = 0$. Différentions cela (selon u). $\langle \frac{\partial N \circ f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle + \langle N \circ f, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \rangle = 0$.

Il vient que $\langle \frac{\partial N \circ f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \langle \frac{\partial N \circ f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle$. Soit exactement ce qu'on cherchait.

Définition 3.5.1 *La courbure de Gauss de S en p est la différentielle de l'application de Gauss en p .*

Rem : cela ne dépend pas du choix de l'application de Gauss.

3.5.3 Courbure normale et principales

Comme dN_p est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $T_p S$. On appelle directions principales les directions propres du plan tangent.

Dessin...

Définition 3.5.2 *Courbure normale d'une courbe. ...*

Proposition 3.5.2 *La courbure normale ne dépend que de la direction tangente. ...*

Elle vaut $k_n = \langle dN_p \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle N, \gamma''(0) \rangle = \langle N, Kn \rangle$ si γ est une paramétrisation par longueur d'arc.

Définition 3.5.3 *Les courbures principales sont les min et max des courbures normales possibles en un point.*

Proposition 3.5.3 *La courbure de Gauss est le produit des courbures principales.*

Exemples tore, sphere, pseudo sphere.

Enoncé du théorème Egregium.

Références

[Arn. Fray.] J.M. Arnaudies, H. Fraysse, Cours de mathématiques 4, algèbre linéaire et géométrie.

[Ber. Gos.] Marcel Berger, Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés courbes et surfaces*. Presse Universitaires de France, 1992, 511 pp. (*Chapitres 8 et 10*).

[Lau] François Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*. Cours à l'Ecole Polytechnique, 1998. 224 pp. Editeur "Ecole Polytechnique". (*Chapitres I, II, IV*).

[Gou] Xavier Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*. Ellipses 1994. 416 pp. (*Chapitre V*).

[Rou] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003. 418 pp. (*Chapitres 2, (4), 5, 6, 7*).