Cinquième feuille d'exercices. Equations différentielles non linéaires. L3b.

February 21, 2012

****

Soit l'équation $\ddot{x(t)} + x(t) + (x(t))^3 = 0$. Soit $t \to x(t)$une solution telle que $x(0) = a, \ \dot{x}(0) = 0$.

1. Trouver une fonction F sur le plan, telle que $(x(t), \dot{x}(t))$ reste "sur la courbe" bornée, $F(x, y) = c$.
2. Montrer que les solutions de l'équation sont toutes périodiques.

****

Soit $\rho \to g(\rho)$ une fonction localement lipschitzienne et strictement positive. Montrer que $\dot{\rho}(t) = g(\rho(t))$ (pour $t \geq 0$) a ses solutions définies pour tout temps si et seulement si $\int_0^\infty \frac{d\rho}{g(\rho)} d\rho = \infty$.

Montrer que si $g(\rho) = \rho^2$ les solutions de $\dot{x}(t) = g(x(t))$ (pour t réel) ne sont pas définies pour tout temps. Donner l'aspect des courbes intégrales dans le plan (t, x).

****

On considère l'équation différentielle suivante (1) $x' = \frac{x^3}{1+tx^2}$.

1. Montrer qu'il s'agit en fait de trois équations différentielles définies dans des domaines de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
2. Soit $\tilde{x}$ une solution de cette équation différentielle ordinaire. On suppose que $t \to \tilde{x}(t)$ est bijective (entre son ensemble de définition et son image) de classe C^1 et que sa réciproque est aussi de classe C^1. On note alors sa réciproque $x \to \tilde{t}(x)$. Montrer qu'en écrivant $t'(x) = \frac{dt}{dx}$ dans (1), on se ramène à une équation différentielle linéaire $(1')$ à trouver. La résoudre.
3. Déterminer grâce à la question précédente les solutions maximales de (1) en précisant leurs intervalles de définition.
4. Les équation (1) et $(1')$ sont-elles complètement équivalentes?
5. On s'intéresse maintenant à l'équation de Lagrange (importante en mécanique) suivante (1) $y = y'(y' - 2t)$.

   a) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz?

   b) Chercher les solutions affines de cette équation.

   c) Dériver l'équation par rapport au temps et poser $p = y'$. On obtient ainsi une équation différentielle ordinaire vérifiée par $t \to p(t)$.

   d) Comme ci-dessus, écrire l'équation vérifiée par la fonction réciproque $p \to t(p)$.

   e) Résoudre cette équation. Cela donne un paramétrage du graphe des solutions $p \to (t(p), p(p - 2t(p)))$.
6. On s'intéresse maintenant à l'équation de Clairaut suivante (2) $y = y'(t + 1 - y')$.

   a) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz?

   b)On cherche les solutions affines de (2) sous la forme $y(t) = a + by$. Quelles sont les valeurs de a et b possibles?

   c) Reprendre la question 5c).

   d) Montrer que si les fonctions $p$ne sont pas constantes, elles vérifient une équation simple.

   e) Donner toutes les solutions de l'équation initiale.

   f) Représenter ces solutions sur un graphique. Qu'observe-t-on?

****