Calcul différentiel (L3): courbes dans le plan et dans l'espace

On rappelle qu'une *courbe (paramétrée)* α est une application continue $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ou parfois $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}^n$. On suppose α de classe C^k dans $]a,b[$, avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. La courbe est dite *régulière* si la vitesse $\alpha'(t)$ est non nulle, pour tout $t \in (a,b)$, et dans ce cas, la *tangente* en $\alpha(t_0)$ est la droite passant par $\alpha(t_0)$ dirigée par $\alpha'(t_0)$, pour $t_0 \in]a,b[$. Soit $\alpha^{(k)}(t_0)$ le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\alpha'(t_0)$. Le plan P engendré par $\alpha'(t_0)$ et $\alpha^{(k)}(t_0)$ est le *plan osculateur* en $\alpha(t_0)$.

Exercice 1. *(i) Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue et p fois continument dérivable dans $]a,b[$ telle que*

$$\alpha^{(p)}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(t)\alpha^{(i)}(t),$$

pour $t \in]a,b[$, avec fonctions $a_1,\ldots,a_p \in C(I,\mathbb{R})$ et $p < n$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension au plus p tel que $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq E$.

Indication: Soit $t_0 \in]a,b[$ quelconque et considérer le sous-espace E engendré par les $\alpha(t_0),\ldots,\alpha^{(p-1)}(t_0)$.

(ii) On suppose en plus que $n = 3$ et $\alpha''(t) = a(t)\alpha(t)$, pour tout $t \in]a,b[$, avec $a \in C(]a,b[,\mathbb{R})$ (mouvement à accélération centrale*). Montrer que dans ce cas, la trajectoire n'est pas seulement dans un plan mais en plus $\alpha(t) \times \alpha'(t) = cte$.*

Exercice 2. *Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée regulière, de classe C^k avec $k \geq 1$, et $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle que la* longueur de α relative au choix de $\| \ \|$ *est donnée par la formule :*

$$L(\alpha,a,b) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du.$$

(i) Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon R dans $\mathbb{R}^2$, pour la norme du max et la norme euclidienne usuelle.

(ii) Dorénavant, on ne considère que la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la longueur d'un arc de parabole $y = ax^2$ au moyen de argsh.

(iii) Montrer l'inégalité $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq L(\alpha,a,b)$.

(v) On revient au cadre général. Que vaut $L(\alpha,a,b)$ lorsque la paramétrisation est normale ?

(vi) Montrer que $L(\alpha,a,b)$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation de α, i.e. si $s : I \to J$ est un C^1-difféomorphisme, alors $L(\alpha,a,b) = L(\alpha \circ s^{-1}, s(a), s(b))$.

(vii) Montrer que l'application $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+v^2} \geq \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}(u-v),$$

pour tous $u,v \in \mathbb{R}$.

(viii) Soient $c,d \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\alpha(t) = (t,f(t))$. On note Γ l'ensemble des arcs α construit de la sorte. Montrer que $\inf_{\alpha\in\Gamma}\{L(\alpha,a,b)\}$ *est un minimum atteint par la seule la courbe appartenante à Γ, associée à une fonction affine.*

Indication: Appliquer le point précédent avec $u = f'(x)$ et $v = g'(x)$.

Exercice 3. *Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée regulière, de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est d'apprendre à calculer concrètement la courbure d'un arc paramétré.*

(i) Soit $t_0 \in [a,b]$. On considère l'application $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ donnée par $s(t) = L(\alpha,t_0,t)$. Montrer que s est une fonction croissante bijective et, si J dénote l'intervalle image de s, elle définit en plus un C^k-difféomorphisme de $]a,b[$ sur l'intérieur de l'intervalle J. On appellera s la longueur d'arc *ou* abscisse curviligne *de $alpha$ d'origine t_0.*

(ii) Montrer que $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ et

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|},$$

pour tout $t \in]a,b[$.

(iii) *Montrer que la courbe paramétrée* $\delta = \alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ *est normale.*

(iv) *Montrer que, pour tout* $u \in J^\circ$*, les vecteurs* $\delta'(u)$ *et* $\delta''(u)$ *sont orthogonaux.*

(v) *Montrer que, pour tout* $t \in]a, b[$*, on a* $\alpha'(t) = s'(t)\delta'(s(t))$ *et* $\alpha''(t) = s''(t)\delta'(s(t)) + (s'(t))^2\delta''(s(t))$*. En déduire* $\delta''(s)$ *en fonction de* α *et ses dérivées.*

(vi) *Montrer qu'en un point paramétré par* $s = s(t)$*, la* courbure *définie par* $\kappa(s) = \|\delta''(s)\|$ *vaut*

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{\|\alpha'(t)\|^2\|\alpha''(t)\|^2 - \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle^2}}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(vii) *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *de classe* C^k*. Montrer que la courbure de la courbe* $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ *définie par* $\alpha(t) = (t, f(t))$ *en un point* $(t_0, f(t_0))$ *est*

$$\kappa(t_0) = \frac{|f''(t_0)|}{\sqrt{(1 + f'(t_0)^2)^3}}.$$

(viii) *Calculer la courbure des courbes suivantes en un point quelconque (où* $a \in \mathbb{R}$*):*

- (a) $y = ax$,
- (b) $y = ax^2$,
- (c) $y = e^{ax}$,
- (d) $x = \cos(ay)$,
- (d) $xy = a$.
- (e) $y = ax^n$, *avec* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 4. *Soit* $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R}^2$ *une courbe paramétrée, de classe* C^∞*, regulière, d'abscisse curviligne* s *et soit* (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. On pose* $\bar{t}(s) = (\alpha \circ s^{-1})'(s)$*, appelé* vecteur tangent.

(i) *Montrer que* $\bar{t}(s)$ *est un vecteur unitaire et qu'il existe* $\theta \in [0, 2\pi]$ *tel que* $\bar{t}(s) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.

(ii) *On note* $\bar{n}(s) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$*. Montrer que* $\bar{n}(s)$ *est un vecteur unitaire, orthogonal* $\bar{t}(s)$*. Par définition, le repère orthonormal* $(\bar{t}(s), \bar{n}(s))$ *associé au point* $\alpha \circ s^{-1}(s)$ *est le* repère de Frenet *en le paramètre* s *associé à* α.

(iii) *On pose* $J = s([a, b])$*. Montrer qu'il existe une unique fonction* $c : J \to \mathbb{R}$*, dire* courbure algébrique (ou courbure signée) *associée à* α*, telle que, pour* $s \in J$*,* $d\bar{t}(s)/ds = c(s)\bar{n}(s)$.

(iv) *Montrer que, pour tout* $s \in J$*,* $d\bar{n}(s)/ds = -c(s)\bar{t}(s)$.

(v) *Montrer que* $\kappa(s) = |c(s)|$*, pour tout* $s \in J$.

(vi) *Considérons l'ellipse d'equation* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$*, avec* $a > b > 0$*. Posons* $h(t) = a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)$*. Montrer que*

$$\bar{t}(s(t)) = \Big(-\frac{a\sin(t)}{\sqrt{h(t)}}, \frac{b\cos(t)}{\sqrt{h(t)}}\Big) \quad \textit{et} \quad \bar{n}(s(t)) = \Big(-\frac{b\cos(t)}{\sqrt{h(t)}}, \frac{a\sin(t)}{\sqrt{h(t)}}\Big).$$

En déduire que

$$c(s) = \frac{ab}{\sqrt{h(t)^3}}.$$

Exercice 5. *Démontrer qu'une courbe plane régulière est uniquement déterminée par les fonctions* $c(s)$ *à une isométrie près, i.e. si* $c :]a, b[\to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors il existe une courbe paramétrée* $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ *dont la courbure est* c*, et en plus, si* $\beta :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ *est une autre courbe paramétrée dont la courbure est* c*, il existe une application linéaire* $L \in \mathrm{SO}(2)$ *et un element* $v \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $L(\alpha(t)) + v = \beta(t)$*, pour tout* $t \in]a, b[$.

Indication: Pour l'existence considérer la fonction $\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \kappa(u)du$.

Exercice 6. *Soit* $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée, de classe* C^∞*, regulière, paramétrée par longueur d'arc avec d'abscisse curviligne* s*. On pose* $\bar{t}(s) = \alpha'(s)$*, appelé* vecteur tangent*. On rappelle que* $\bar{t}(s)$ *est un vecteur unitaire, et que* $\alpha''(s)$ *est orthogonal à* $\bar{t}(s)$.

(i) On dit que α est biréguliére si elle est régulière et $\bar{t}'(s)$ n'est jamais nul, et on va supposer désormais que c'est le cas. On définit alors $\bar{n}(s) = \bar{t}'(s)/\|\bar{t}'(s)\|$ le vecteur normal (unitaire). C'est clair que $\bar{t}'(s) = \kappa(s)\bar{n}(s)$, et que le plan P engendré par $\bar{t}(s)$ et $\bar{n}(s)$ est le plan osculateur. Vérifier que $\bar{n}'(s)$ est à son tour normal à $\bar{n}(s)$.

(ii) Posons $\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \times \bar{n}(s)$ le vecteur binormal. Montrer que les vecteurs $\bar{b}'(s)$ et $\bar{n}(s)$ sont colinéaires, et il existe donc une fonction $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$, dite torsion de α, telle que $\bar{b}'(s) = -\tau(s)\bar{n}(s)$. Montrer que $\bar{n}'(s) = -\kappa(s)\bar{t}(s) + \tau(s)\bar{b}(s)$.

Exercice 7. *Soit $\alpha : [a,b] \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, de classe C^∞, biregulière, pas nécessairement paramétrée par longueur d'arc.*

(i) Montrer que dans ce cas on peut reécrire l'expression de la courbure en un point paramétré par $s = s(t)$ donnée dans l'Exercice 3 par la formule

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(ii) Montrer que la torsion en un point paramétré par $s = s(t)$ est donnée par

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

Exercice 8. *Démontrer qu'une courbe biréguliére dans l'espace est uniquement déterminée par les fonctions $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ à une isométrie près, i.e. si $\kappa, \tau :]a,b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $\kappa(s) > 0$ pour tout $s \in]a,b[$, alors il existe une courbe paramétrée $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ dont la courbure et la torsion sont κ et τ, resp.; et en plus, si $\beta :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ est une autre courbe paramétrée dont la courbure et la torsion sont κ et τ, resp., il existe une application linéaire $L \in \mathrm{SO}(3) : \mathbb{R}^3$ et un element $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $L(\alpha(t)) + v = \beta(t)$, pour tout $t \in]a,b[$.*

Indication: Considérer le système différentiel linéaire donné par les formules de Frenet.

Exercice 9. *Montrer qu'une* hélice circulaire *$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ définie sur $\mathbb{R}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, a pour courbure $\kappa = a/(a^2+b^2)$ et pour torsion $\tau = -b/(a^2+b^2)$. En déduire que courbure positive et torsion constantes caractérisent les hélices circulaires.*

Exercice 10. *Calculer la longueur d'arc, la courbure κ et la torsion τ de la* cubique gauche *$\alpha(t) = (t, t^2/2, t^3/6)$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 11. *Calculer la courbure κ et la torsion τ de la courbe $\alpha(t) = (t^3, (t+1)^3, 3t)$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 12. *Déterminer le rayon de courbure $R(x)$ et le centre de courbure $O(x)$ de la parabole $y = x^2/2$.*

Exercice 13. *On considère une courbe plane donnée en coordonnées polaires : $\alpha(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}$.*

(i) Montrer que la courbure est donnée par

$$\kappa(\theta) = \frac{2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)(\rho(\theta) - \rho''(\theta)}{(\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(ii) Déterminer le vecteur $\bar{n}(\theta)$, le rayon de courbure $R(\theta)$ et le centre de courbure $O(\theta)$.

(iii) Déterminer le lieu du centre de courbure (la développée) de la spirale logarithmique $\rho(\theta) = e^{a\theta}$.

Exercice 14. *Calculer la courbure de la spirale $\rho(\theta) = \theta$.*

Exercice 15. *Quelles sont les courbes paramétrées par longueur d'arc dont la courbure est $\kappa(s) = 1/s$, pour $s \in \mathbb{R}_{>0}$?*

Exercice 16. *Calculer la longueur d'arc, la courbure et le rayon de courbure de la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2)du, \int_0^t \sin(u^2)du \right).$$

Faire un déssin de la courbe. Quelle est la longueur de la courbe ?

Exercice 17. *Un cercle C de rayon 1 (la roue du vélo) roule sans glisser sur l'axe Ox.*

(i) Quelle est la courbe $\alpha(u)$ décrite par un point fixé de C (la valve) situé à l'origine en O, où O désigne l'abscisse du point de contact de C avec Ox ?

(ii) Calculer la courbure $\kappa(u)$ et le rayon de courbure $R(u)$ de cette courbe.

(iii) Déterminer aussi le lieu du centre de courbure $O(u)$ (la développée).