Quatrième feuille d'exercises de Calcul différentiel (L3): équations différentielles

Deuxième Semestre 2011-2012

Exercise 1. *On se propose de déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que si f n'est pas identiquement nulle alors $f(0) = 1$. On suppose désormais que ceci est vérifié. Démontrer que dans ce cas-là, f est aussi paire.

(ii) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_0^\varepsilon f(s)ds \neq 0$.

(iii) En déduire que $f(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)ds/(2\int_0^\varepsilon f(s)ds)$, et alors f es C^∞.

(iv) Montrer que $f'(x+y) = f'(x)f(y) + f(x)f'(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire une équation différentielle vérifié par f. À partir de cette équation obtenir f.

Exercise 2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'équation différentielle*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

est appellée équation de Bernoulli. *Elle est linéaire si $n = 0$ ou $n = 1$. Montrer que on peut réduire cette équation différentielle à une équation différentielle linéaire pour tous $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ en employant le changement de variable $z = y^{1-n}$. Trouver les solutions des équations suivantes:*

(a) $xy' + y = x^4y^3$,

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$,

(c) $xy' - 3y = x^4$.

Exercise 3. *Soient $p, q \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle*

$$x^2y + pxy + qy = 0$$

est appellée équation d'Euler.

(i) Montrer que le changement de variable $x = e^t$ donne une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

(ii) Utiliser le point (i) pour trouver les solutions des équations différentielles suivantes (sur $\mathbb{R}_{>0}$):

(a) $x^2y'' + 2xy'6y = 0$,

(b) $x^2y''xy' + y = 2x$.

Exercise 4. *Soit*

$$y' = x^2 + y^2. \tag{E}$$

(a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de (E) *vérifiant $y(0) = 0$.*

(b) Montrer que y est une fonction impaire.

(c) Étudier la monotonie et la concavité de y.

(d) Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

(e) Dresser le tableau de variation de y.

Exercise 5. *On étudie l'équation différentielle*

$$y' = x^3 + y^3. \tag{E}$$

Soit y une solution maximale de l'équation différentielle (E) *définie en 0 et vérifiant $y(0) > 0$.*

(a) *Justifier que y est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.*

(b) *Montrer que y est croissante sur $[0, \beta[$.*

(c) *Établir que β est réel.*

(d) *Déterminer la limite (à gauche) de y en β.*

Exercise 6. (a) *Montrer que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = \frac{1}{1+xy}, \\ y(0) & = 0, \end{cases}$$

possède une solution maximale unique.

(b) *Montrer que celle-ci est impaire et strictement croissante.*

(c) *Etablir enfin qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.*

(d) *Déterminer la limite en $+\infty$ de cette solution.*

(e) *On note φ la bijection réciproque de cette solution. Exprimer φ à l'aide d'une intégrale en formant une équation différentielle vérifiée par cette fonction.*

Exercise 7. *On considère l'équation*

$$y' = x + y^2. \tag{E}$$

(a) *Quel est le lieu des points où les solutions de* (E) *présentent une tangente horizontale ?*

(b) *Décrire le lieu des points d'inflexion.*

Exercise 8. *Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation $yy' = x$.*

Exercise 9 (Sur le lemme de Grönwall). (i) *(Version différentielle) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $u \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$ et $y \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y'(t) \leq u(t)y(t)$. Montrer que*

$$y(t) \leq y(a)\exp\left(\int_a^t u(x)dx\right),$$

pour tout $t \in I$.

(ii) *(Version intégrale I) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $u, y \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$, et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y(t) \leq C + \int_a^t u(x)y(x)dx$ et $u(t) \geq 0$. Montrer que*

$$y(t) \leq C\exp\left(\int_a^t u(x)dx\right),$$

pour tout $t \in I$.

(iii) *(Version intégrale II) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $\alpha, u, y \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t u(x)y(x)dx$ et $u(t) \geq 0$. Montrer que*

$$y(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \left(\alpha(x)u(x)\exp\left(\int_x^t u(s)ds\right)\right)dx,$$

pour tout $t \in I$.

(iv) *(Application I) Soit $y \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \geq 0$, on a $|y(t)| \leq \int_0^t xy(x)dx$. Montrer que $y \equiv 0$.*

(v) *(Application II) Soit $q \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ croissante, et soit y une solution maximale de $y'' + qy = 0$. Montrer que y est définie et bornée sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Exercise 10. *Soit $c > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) & = \sqrt{|y(t)|} + c, \\ y(0) & = 0. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une solution maximale $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ à ce problème (pourquoi ?).

(i) Montrer que y est strictement croissante. En déduire que y est une bijection de (a, b) sur son image.

(ii) Montrer que, pour tout $t \in (a, b)$, on a $|y(t)| \geq t^2/4$.

(iii) En déduire que $y \in \mathrm{C}^1((a, b), \mathbb{R})$ est un difféomorphisme. On note $z : \mathbb{R} \to (a, b)$ la fonction réciproque de y.

(iv) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $z'(t) = 1/(c + \sqrt{|t|})$.

(v) En déduire que z et y sont des fonctions impaires et donner une expression explicite pour z. En déduire aussi que $(a, b) = \mathbb{R}$.

Exercise 11. *(i) Soit $a > 0$. Soient $u, v \in \mathrm{C}([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}_{\geq 0})$ et $C \in \mathbb{R}$. Suppusons que*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(x)v(x)dx,$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + a]$. Montrer que

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(x)dx\right),$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + a]$.

(ii) Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{\geq 0} \to M_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\int_0^{+\infty} \|\varepsilon(s)\| ds$ converge. Montrer que les solutions $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ de $y'(t) = \varepsilon(t)y(t)$ sont bornées et admettent une limite en $+\infty$.

(iii) Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de parties réelles nulles. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ une solution de l'équation $y'(t) = (A + \varepsilon(t))y(t)$. Montrer que $t \mapsto \exp(-tA)y(t)$ admet une limite en $+\infty$ (dans $\mathbb{C}^n$).

(iv) Soit $q : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} |q(s)| ds$ converge et soit $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $y''(t) + (1 + q(t))y(t) = 0$. Démontrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) - \alpha \cos(t) - \beta \sin(t) = 0.$$