Troisième feuille d'exercises de Calcul différentiel (L3): équations différentielles

Deuxième Semestre 2011-2012

Exercise 1. *Si pour tout réel t, les matrices $A(t)$ et $A'(t)$ commutent alors $(\exp A(t))' = A'(t)\exp A(t)$.*

Exercise 2. *Soit A une matrice $n \times n$ et $V(t) = \exp tA$. Donner à l'aide de $V(t)$ une solution vérifiant $Y(0) = C_0$ au système différentiel : $Y' = AY$*

Exercise 3. *Résoudre les systèmes :*

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 + y_2, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Exercise 4. *Soit $\tilde{A}(t)$ la transposée de la comatrice de $A(t)$, on rappelle qu'on a : $\tilde{A}(t)A(t) = \det A(t) I_n$. Montrer qu'on a : $(\det A(t))' = \mathrm{Trace}(A'(t)\tilde{A}(t))$.*

Exercise 5. *Résoudre $y' + 2ty = te^{-t^2}$.*

Exercise 6. *Montrer qu'il existe une solution à $ty' + 2y = \frac{t}{1+t^2}$ définie sur tout $\mathcal{R}$.*

Exercise 7. *Est-ce-que la fonction $f(t) = \sin^2 t$ peut être solution d'une équation linéaire du second ordre $y'' = a_2(t)y' + a_1(t)y$?*

Exercise 8. *Montrer que pour que f non triviale soit solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, il faut et il suffit que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ n'aient pas un zéro commun.*

Exercise 9. *Soit $f(t)$ une fonction continue. Notons y_λ la solution de l'équation différentielle $y'' = (1 + \lambda f(t))y$ telle que $y_\lambda(0) = y_\lambda'(0) = 1$, montrer que pour λ assez petit, y_λ et y_λ' ne s'annulent pas sur $[-1, +1]$.*

Que se passe-t-il si f est constante > 0 et λ est très négatif ?

Exercise 10. *Soit $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Calculer la résolvante V du système $Y' = AY$. Puis déterminer les solutions U du système $U' = AU + B$ où $B(t) = e^{t^2/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la solution U telle que $U(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exercise 11. *On note $V(t)$ la résolvante du système $Y' = AY$ (0). Si $A(u)$ est antisymétrique pour tout u, on a :*

1) ${}^tV(t)V(t) = I_n$ i.e. $V(t)$ est orthogonale.

2) Soit Y une solution de (0), montrer que $||Y||$ est bornée.

Exercise 12. *Déterminer y de classe $\mathcal{C}^2$ tel que pour tout t, $y(t) \neq 0$ et*

$$\det \begin{pmatrix} y & y' \\ y' & y'' \end{pmatrix} = 0$$

.

Exercise 13. *On note $U(t)$ la résolvante du système $Y' = AY$.*

1) On suppose que $A(u)$ commute avec une matrice fixe B pour tout u. Montrer que B commute avec $U(t)$. (Indication: commencer par le cas où B est inversible) .

2) En déduire que si $A(u)$ commute avec $B(v)$ pour tous les u, v, alors si on note $V(t)$ la résolvante du système $Y' = BY$, UV est la résolvante du système $Y' = (A + B)Y$. En déduire que U et V commutent.

Exercise 14. *Soit l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ $(*)$. Montrer qu'il existe une fonction nulle part nulle $v(x)$ telle que $y = uv$ est solution de $(*)$ ssi u est solution de $u'' + q(x)u = 0$.*

Exercise 15. *Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre $y'' = (4t^2 + 2)y$ $(*)$ avec $t \in \mathcal{R}$. Vérifier que $y_0 = e^{t^2}$ est solution de $(*)$. On note z la solution de $(*)$ telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.*

a) Etablir le système différentiel correspondant à $(*)$. En déduire à partir de son Wronskien une équa. diff. linéaire du 1er ordre (avec second membre) satisfaite par z.

b) Déterminer z en appliquant directement la méthode de variation des constantes à $(*)$. Retrouver l'équa diff de a).

Exercise 16. *On considère une équa. diff. lin. du second ordre $y'' = a(t)y' + b(t)y$ $(*)$ (où $a(t), b(t)$ sont des fonctions continues) qui possède une solution y_0 particulière ne s'annulant pas sur un intervalle I. Soit z une solution qq. de $(*)$, montrer que z s'annule au plus une fois sur I.*

Exercise 17. *Montrer que pour que f et g de classe C^2 soit solutions de base d'une équa. diff. linéaire du second ordre sur un intervalle I de réels, il faut et il suffit que $W(f, g) = fg' - f'g$ (le Wronskien de f et g) ne s'annule pas sur I.*

Application : trouver l'éq. dif. lin. du second ordre ayant $f(t) = t$ et $g(t) = t^2$ pour solutions de base sur $I =]0, +\infty[$.