Treizième feuille d'exercices de Calcul différentiel (L3)

Deuxième Semestre 2011-2012

Exercice 1. *Soit M une surface régulière et $p \in M$. Si $\kappa(\theta)$ est la courbure normale en p associée avec une direction qui forme un angle θ avec une direction principale, montrer que*

(i) $\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta)$, *où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales.*

(ii) $H(p) = (\int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta)/2\pi$, *où H est la courbure moyenne.*

(iii) la somme de deux courbures normales associées à deux directions ortogonales en un point est constante.

Exercice 2. *Soient $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ (avec $(a, b, c) \neq 0$) et $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Vérifier que $dN(p) = 0$ pour tout $p \in M$ et donc $K \equiv 0$.*

Exercice 3. *(i) Soit $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sphère unitaire et $N : S^2 \to \mathbb{R}^3$ le vecteur normal extérieur. Montrer que $dN(p)(v) = v$, pour tous $p \in S^2$ et $v \in T_pM$. En déduire que la courbure de Gauss de S^2 en p est 1.*

(ii) Calculer la courbure de la terre, étant donné que le rayon est (environ) de 6400 km.

Exercice 4. *Soit M une surface régulière.*

(i) Montrer que, si κ_i ($i = 1, 2$) sont les courbures principales, $\kappa_1 = H(p) - \sqrt{H^2(p) - K(p)}$ et $\kappa_2 = H(p) + \sqrt{H^2(p) - K(p)}$.

(ii) En déduire que $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ ssi $H^2(p) - K(p) = 0$. Un point $p \in M$ qui satisfait $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ est appelé umbilique. *Donner un exemple de surface régulière avec un seul point umbilique et une autre avec une infinité.*

Exercice 5. *Soient $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière donnée par $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^4\}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $f(u, v) = (u, v, u^4)$, et $N : M \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$N \circ f = \frac{\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v}{\|\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v\|}.$$

Vérifier que $dN(0) = 0$. Calculer les points planes de M.

Exercice 6. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Une courbe $\alpha :]a, b[\to M$ est dite une* ligne de courbure *de M si $\alpha'(t)$ est une direction principale de M en $\alpha(t)$, pour tout $t \in]a, b[$. Montrer que α est une ligne de courbure si et seulement s'il existe une fonction différentieable $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $(N \circ \alpha)'(t) = f(t)\alpha'(t)$, pour tout $t \in]a, b[$.*

Exercice 7. *Soient $M \subseteq \mathbb{R}^3$ le cylindre donné par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ et $N : M \to \mathbb{R}^3$ définie par $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Vérifier que $dN(p)(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, 0)$ pour tout $p \in M$. En déduire que les autovaleurs de $dN(p)$ sont $\lambda_1(p) = 0$, $\lambda_2(p) = 1$ et que la courbure de Gauss est nulle.*

Exercice 8. *On considère le paraboloïde elliptique $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. Calculer les courbures principales et la courboure de Gauss en $(0, 0, 0)$.*

Exercice 9. *Soit M le paraboloïde hiperbolique défini par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to M$ l'application $f(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$. Soit $N : M \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$N \circ f = \frac{\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v}{\|\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v\|}.$$

Vérifier que

$$N \circ f(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}} \right).$$

En déduire que pour tout $v \in T_{(0,0,0)}M$ on a $v_3 = 0$ et $dN(0, 0, 0)(v) = (2v_1, -2v_2, 0)$, et donc les autovaleurs de $dN(0, 0, 0)$ sont $\lambda_1(0, 0, 0) = 0$, $\lambda_2(0, 0, 0) = 1$ et $K(0, 0, 0) = -4$.

Exercice 10. *Soit M le cylindre parabolique défini par $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to M$ l'application $f(u,v) = (u,v,u^2)$. Soit $N : M \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$N \circ f = \frac{\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v}{\|\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v\|}.$$

Vérifier que

$$N \circ f(u,v) = \left(\frac{-2u}{\sqrt{1+u^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right).$$

En déduire que $dN(0,0,0)(v_1,v_2,v_3) = (-2v_1,0,0)$. Conclure que les autovaleurs de $dN(0,0,0)$ sont $\lambda_1(0,0,0) = -2$, $\lambda_2(0,0,0) = 0$ et $K(0,0,0) = 0$.

Exercice 11. *Soit M le tore de $\mathbb{R}^3$ défini par $M = F^{-1}(r^2)$, où $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ est donnée par $F(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2$ ($a > r$). Vérifier que l'application $N : M \to \mathbb{R}^3$ donnée par*

$$N(x,y,z) = \frac{1}{r} \left(\frac{x(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right)$$

est un champ des vecteurs unitaires sur M.

Soit $f :]0,2\pi[\times]0,2\pi[\to M$ l'application

$$f(u,v) = ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)).$$

Montrer que

$$N \circ f(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \operatorname{sen}(u)) = -\frac{\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v}{\|\partial f/\partial u \times \partial f/\partial v\|}(u,v)$$

En déduire que $K(f(u,v)) = \cos(u)/(r(a + r\cos(u)))$. Étudier le signe de la courbure en chaque point de M.

Exercice 12. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière. On suppose que M est tangente à un plane le long d'une courbe $\alpha :]a,b[\to M$. Montrer que chaque point sur la courbe est parabolique ou plane.*

Exercice 13. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière dont tous les points sont planes. Montrer que M est incluse dans un plane.*