Douzième feuille d'exercices de Calcul différentiel (L3)

Deuxième Semestre 2011-2012

Exercice 1. *Montrer que* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *est une immersion qui n'est pas injective. Décrire* f *si l'on fait l'identification* $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y) = (x+y, (x+y)^2)$. *Montrer que tout point* $\mathbb{R}^2$ *est un point critique de* f.

Exercice 3. *Soit* $f :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *la fonction différentiable*

$$f(t,s) = (\sin(t), \sin(2t), s).$$

Montrer que f *est une immersion injective, mais* f *n'est pas un homéomorphisme. Démontrer en plus qu'il n'existe aucune structure de surface régulière sur* $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4. *Montrer que le cône* $Q : x^2 + y^2 z^2 = 0$ *n'est pas une surface régulière.*

Exercice 5. *Soient* $r > 0$ *et* $S_r^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ *la sphère de rayon* r *et de centre l'origine. Vérifier que la fonction* $f :]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$f(\alpha, \theta) = (r\cos(\alpha)\cos(\theta), r\sin(\alpha)\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est une paramétrisation locale de S_r^2. *Décrire l'image de* f.

Exercice 6. *Soient* $a, r \in \mathbb{R}$ *tels que* $a > r > 0$ *et*

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2\}$$

le tore de rayons a *et* r *et de centre l'origine. Vérifier que*

1. T *est une surface régulière.*
2. $f :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$f(u,v) = ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u))\sin(v), r\sin(v))$$

est une paramétrisation locale de T. *Décrire l'image de* f.

Exercice 7. *Soit* C *le semi-méridian de* S_r^2 *d'extrema (inclus): pôle nord* $N = (0,0,r)$ *et pôle sud* $S = (0,0,r)$ *et qui contient le pôle ouest* $O = (r,0,0)$.

1. *Vérifier que* $S_r^2 \setminus \{C\}$ *est une partie ouverte de* S_r^2.
2. *Soit* $f :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to S_r^2 \setminus \{C\}$ *l'homeomorphisme défini par*

$$f(\alpha, \theta) = (r\cos(\alpha)\sin(\theta), r\sin(\alpha)\sin(\theta), r\cos(\alpha)).$$

Montrer que f *est une paramétrisation locale de* S_r^2 *d'image* $S_r^2 \setminus \{C\}$, *et donc* $(S_r^2 \setminus \{C\}, f^{-1})$ *est une carte de* S_r^2.

Exercice 8. *Soient* $A =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ *et* $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}^3$ *données par*

$$f_1(u,v) = \left(\left(2 + v.\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u), \left(2 + v.\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right),$$
$$f_2(u,v) = \left(\left(2 + v.\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos(u), -\left(2 + v.\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\sin(u), \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

On considère $M = f_1(A) \cup f_2(A)$. *Montrer que* M *est une surface régulière, appelée* bande de Möbius.

Exercice 9. *Soit* M *une surface régulière dans* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $v \in \mathbb{R}^3$. *Montrer que les fonctions* $f, h : M \to \mathbb{R}$ *définies par* $f(p) = \|v - p\|^2$ *et* $h(p) = \langle p, v \rangle$ *sont différentiables.*

Exercice 10. *Montrer que le paraboloïde* $z = x^2 + y^2$ *est difféomorphe au plan* $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Exercice 11. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ une partie ouverte non-vide et $f : U \to f(U)$ un difféomorphisme entre deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^3$. Si $M \subseteq U$ est une surface régulière, montrer que*

1. *$f(M)$ est une surface régulière,*
2. *$f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme.*

Exercice 12. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière et soit $U \subseteq M$ une partie ouverte non-vide. Si $p \in U$, vérifier que $T_pG = T_pM$.*

Exercice 13. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière et soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ une partie ouverte non-vide telle que $M \subseteq U$. Soit $g : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et $f = g|_M$. Montrer que $df(p) = dg(p)|_{T_pM}$, pour tout $p \in M$.*

Exercice 14. *Vérifier que si $Q : F(u) = 0$ est une surface quadratique (ou quadrique) dans $\mathbb{R}^n$ (où $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme quadratique) et si $p \in Q$ est un point régulier, alors l'espace tangent à Q en p est*

$$T_p(Q) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle \mathrm{grad}(F)(p), u - p \rangle = 0\}.$$

Exercice 15. *Soit S^2 la sphère unitaire de $\mathbb{R}^3$ et (U, x), (V, y) les cartes de S^2 données par les projections stéréorgraphiques à partir des pôles nord et sud, resp.*

1. *Trouver les coordonnées des vecteurs tangents $\partial/\partial y_i|_p$ $(i = 1, 2)$ par rapport à la base $\{\partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p\}$ de T_pS^2, pour $p \in U \cap V$.*
2. *Si (W, z) est la carte de l'exercice 7 (pour $r = 1$), calculer les coordonnées de $\partial/\partial z_i|_p$ $(i = 1, 2)$ par rapport à la base $\{\partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p\}$ de T_pS^2, pour tout $p \in U \cap W$.*

Exercice 16. *Calculer les composantes de la première forme fondamentale de la sphère en un point du système de coordonnées donné par la paramétrisation*

$$\gamma(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

et donner les domaines de variations possibles pour θ et φ. Déterminer, dans ce système de coordonnées de la sphère, l'équation des courbes qui font un angle constant β avec le méridien $\varphi = C^{te}$. (Réponse $\ln\tan\frac{\theta}{2} = \pm(\varphi + c)(\tan\beta)^{-1}$). Ces courbes sont nommées loxodromies. Ces loxodromies correspondent (lorsqu'elles ne sont pas dégénérées , c'est-à-dire lorsque l'angle initial donné n'est pas nul) à des spirales s'enroulant autour du pôle (le pôle Nord si l'angle initial et dans $]0, \pi[$ et que le déplacement se fait dans le sens des latitudes croissantes). Elle doit son nom au géomètre portugais Pedro Nunes, qui le premier l'a distinguée d'un cercle (1537).

Exercice 17. *Trouver les composantes de la première forme fondamentale de la sphère dans la paramétrisation donnée par la projection stéréographique. Retrouver ainsi que ce système de coordonnées "respecte les angles".*

Exercice 18. *Montrer que*

$$\gamma(u, v) = (u\sin\alpha, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha),\ 0 < u < \infty,\ 0 < v < 2\pi$$

est une paramétrisation du cône d'angle au sommet 2α. Dans ce systme de coordonnes montrer que la courbe $\gamma(c\exp(v\frac{\sin\alpha}{tan\beta}), v)$ avec c =const et β =const coupe les génératrices du cône sous un angle constant β.