Dixième feuille d'exercices de Calcul différentiel (L3)

Exercice 1. *Calculer les dérivées partielles de deuxième ordre des fonctions suivantes et vérifier si les derivées partielles mixtes coïncident:*

1. $f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$,
2. $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\sin(z)$,
3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$,
4. $f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2$,
5. $f(x, y) = \arctan(x^3 - 2xy)$.

Exercice 2. *Calculer toutes les dérivées partielles de troisième ordre des fonctions suivantes:*

1. $f(x, y, z) = xyz$,
2. $f(x, y, z) = e^{xyz}$,
3. $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \sin(y^2 z)$,
4. $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1}$.

Exercice 3. *Montrer que si f est $C^3(\mathbb{R}^3)$, alors*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Quelles autres dérivées d'ordre 3 coïncident?

Exercice 4. *On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0\ \forall(x, y)$. Montrer que*

$$f(x, y) = g(x) + h(y).$$

Exercice 5.

1. *Trouver toutes les fonctions f telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^3\ \forall i, j = 1, 2, 3$.*
2. *Touver toutes les fonctions f telles que*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \equiv 0\ \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) : |\alpha| = k (k \in \mathbb{N}, \textit{fixe}).$$

Exercice 6. *Soient $f(x, y) = \cos(xy), x(u, v) = u + v, y(u, v) = u - v$. Calculer les derivées $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$ et $\frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$*

1. *par substitution,*
2. *par le théorème de dérivation des fonctions composées.*

Exercice 7. *(Opérateur laplacien) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^n$ si elle vérifie l'quation suivante, appelée équation de Laplace:*

$$\triangle\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \equiv 0 \textit{ sur } U.$$

Vérifier que les fonctions suivantes sont harmoniques sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et détérminer U:

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$,
2. $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$,
3. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,
4. $f(x, y, z) = e^{3x+4}\cos(5z) + 4y$.

Exercice 8.

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Posons $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g\left(||x||\right)$. Montrer que:

$$\triangle\ f(x) = \frac{d^2 g}{dt^2}\left(||x||\right) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}\left(||x||\right).$$

Exercice 9. *Soient f, g deux fonctions de classe C^2 définies sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^2$ et telles que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Montrer que f et g sont harmoniques sur U.

Exercice 10. *Calculer le polynôme de Taylor d'ordre deux des fonctions suivantes. Écrire l'expression du reste dans la forme de Lagrange.*

1. $f(x,y) = (x+y)^2$ *en* $(0,0)$,
2. $f(x,y) = e^{x+y}$ *en* $(0,0)$,
3. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ *en* $(0,0)$,
4. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ *en* $(1,0)$,
5. $f(x,y) = \sin(xy)$ *en* $(1,\pi)$,
6. $f(x,y) = e^x \sin(y)$ *en* $(2, \frac{\pi}{4})$,
7. $f(x,y) = \ln(1+xy)$ *en* $(2,3)$,
8. $f(x,y) = x + xy + 2y$ *en* $(1,1)$,
9. $f(x,y) = x^y$ *en* $(1,2)$,
10. $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ *en* $(2,3,4)$.

Exercice 11. *Employer les résultats précédents pour calculer $(0.95)^{2.01}$*

1. *avec une précision plus petite que $1/200$,*
2. *avec une précision plus petite que $1/5000$.*

Exercice 12. *Déduire la formule approximée*

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

pour des valeurs suffisamment petites de $|x|, |y|$.

Exercice 13. 1. *Calculer le polinôme de Taylor de premier ordre en $(1,1)$ de la fonction $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.*

2. *Employer le point précédent pour trouver $e^{\frac{4}{10}}$ à partir de $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$. Vérifier que l'erreur est plus petite que 0.3.*

Exercice 14. *Calculer le polynôme de degré deux tel que l'ordre de contact à l'origine avec la fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ soit maximal.*

Exercice 15. *Trouver tous les points critiques des fonctions suivantes et dire si ce sont des points-cols ou des extrema:*

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$,
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$,
3. $f(x,y) = xy$,
4. $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}}, & si \quad xy \neq 0, \\ 0, & si \quad xy = 0. \end{cases}$

Exercice 16. 1. *Calculer les extrema de $f(x,y) = x^2 + y^4$ et de $g(x,y) = x^4 + y^4$. Calculer aussi les matrices hessiennes en ces points.*

2. *Soit f de classe C^2 telle qu'elle a un extremum strict en $a \in \mathbb{R}^n$. La matrice hessienne $Hf(a)$ est-elle nécessairement définie positive ou négative?*

Exercice 17. *Soit $f(x,y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - 2x^2\right)^2\left(y - x^2\right)$. Montrer que:*

1. $(0,0)$ *est un point-selle.*
2. $Hf(0,0) = 0$.

3. *f a un minimum local en $(0,0)$ sur toute droite qui passe pour $(0,0)$, i.e., si $g(t) = (at, bt)$ alors $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un minimum local en 0 pour tous a, b.*

Exercice 18. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.*

1. *Montrer que $(0,0)$ est un point critique qui n'est pas d'extremum.*
2. *Montrer que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ sont minima globaux.*
3. *Y a-t-il des maxima locaux?*

Exercice 19. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 non linéaire telle que $Df(x_0) \neq 0$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par:*

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x).$$

1. *Montrer que x_0 est un point critique de g.*
2. *Montrer que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.*
3. *Répondre aux questions précédentes si l'on suppose que $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$.*

Exercice 20. *Trouver les points critiques des fonctions suivantes, et dire si ce sont des extrema (maxima, minima), ou des points-cols:*

1. $f(x,y) = (2x+1-y)^2$,
2. $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$,
3. $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$,
4. $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$,
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy$,
6. $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$,
7. $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$,
8. $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$,
9. $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$,
10. $f(x,y,z) = xy + z^2$,
11. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$,
12. $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$,

Exercice 21. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que:*

$$f(0,1) = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right) = (0,2) \text{ et } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$:

1. *Calculer $Hg(0,1)$.*
2. *Est-ce que g a un extremum local en $(0,1)$?*

Exercice 22. *Dire s'ils existent des nombres réels a et b tels que la fonction*

$$f(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

a un minimum local en $(2,1)$.

Exercice 23. *Déterminer les extrema globaux de $f|_A$ pour les fonctions suivantes:*

1. $f(x,y) = xy(x-y)^2$, $\qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\right\}$,
2. $f(x,y) = xy(x-y)^2$, $\qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\right\}$,
3. $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$, $\qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\right\}$,

4. $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3, \qquad A = \mathbb{R}^2,$
5. $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3, \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}.$

Exercice 24. *On considère un carré (l'intérieur inclus) A dans le plan de sommets $\{(-1,0),(1,0),(1,-2),(-1,-2)\}$. Trouver les extrema globaux de la fonction $f(x,y) = 2x - y^2$ définie sur B, où B est donné par $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\right\} \cap A$.*

Exercice 25. *Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance vers $(1,0)$ est minimale:*

1. *par la méthode des multiplicateurs de Lagrange,*
2. *en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.*

Exercice 26. *Trouver les maxima et les minima de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ à l'intérieur du cercle unitaire et sur la frontière.*

Exercice 27. *Trouver les maxima et les minima de $f(x,y) = y + x - 2xy$ à l'intérieur et sur la frontière de $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}$.*

Exercice 28. *Trouver les extrema de f sous contraintes:*

1. $f(x,y,z) = x - y + z, \qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\right\},$
2. $f(x,y) = \sin(xy), \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\right\},$
3. $f(x,y) = xy, \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\},$
4. $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\right\}.$

Exercice 29. *Résoudre les problèmes suivants par la méthode des multiplicateurs de Lagrange:*

1. *Trouver la distance la plus courte du point $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ au plan $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, où $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.*
2. *Trouver le point sur la droite $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ et $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ qui soit le plus proche de l'origine.*
3. *Montrer que le volume du plus grand parallélépipède rectangle qui puisse être inscrit dans l'ellpisoïde*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
est $8abc/3\sqrt{3}$, avec $0 < c < b < a$.

Exercice 30. *Trouver la distance minimale entre la courbe $y = x^2$ et la droite $x - y - 2 = 0$.*

Exercice 31. *Trouver le point de la surface $z = xy - 1$ le plus proche à l'origine.*

Exercice 32. *Soient A, B, C trois angles positifs tels que $A + B + C = \pi/2$. Montrer que*
$$\sin(A)\sin(B)\sin(C) \leq \frac{1}{8}.$$

Exercice 33. *Un récipient de forme cylindrique doit avoir le volume d'un litre. De quelle façon faut-il le concevoir pour minimiser le matériel employé?*

Exercice 34. *Trouver les point les plus éloignés et les plus proches du point $(0,0,2)$ sur la sphère*
$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$