Examen du 25 juin 2007. UE Mat 243.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Montrer que

$$\forall s \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad P([X > s+t]/[X > t]) = P([X > s])$$

Exercice 2.

Soit $f \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ae^{-|x|}$.

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f (on dit que X suit une loi de Pascal). Montrer que X a des moments de tout ordre et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; E(X^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \; n!$.
3. Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la même loi de Pascal. Déterminer la densité de $Y = |X_1| + |X_2|$.

Exercice 3.

Une personne souhaitant rentrer chez elle, possède un trousseau de n clefs. On note X le nombre d'essais nécessaires pour qu'elle ouvre sa porte. Déterminer dans chacun des cas suivants la loi de X.

1. La personne élimine après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.
2. La personne remet dans le trousseau après chaque essai la clef qui n'a pas convenu et réessaye avec une clef prise au hasard dans le trousseau.

Déterminer dans chaque cas $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 4.

Soit Ω un ensemble fini à n éléments.

a) Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$?

b) Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ainsi que $\Omega_1 \neq \emptyset$ et $\Omega_2 \neq \emptyset$, on dit que $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ est une partition de Ω en deux parties. On ne distingue donc pas les partitions $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ et $\{\Omega_2, \Omega_1\}$. Quel est le nombre u_n de partitions de Ω en deux parties non vides ?

c) **Facultatif.** De la même manière que dans a), on définit une partition de Ω en trois parties (non vides). Soit v_n ce nombre de partitions de Ω en trois parties non vides. Montrer que $v_3 = 1$ et que pour $n \geq 3$ on a

$$v_{n+1} = \left(2^{n-1} - 1\right) + 3v_n \ .$$