Examen de Mat243 du lundi 19 mai 2008

Sans document, calculette autorisée, durée : 2h
Le barême est **indicatif**

Toute affirmation devra être justifiée

Exercice 1 (4 points)
On dispose de 16 cases numérotées de 1 à 16.
1) De combien de façons peut-on placer 4 pions blancs indiscernables dans ces cases sachant qu'une case ne peut comporter strictement plus d'un pion ?
2) De combien de façons peut-on placer 4 pions blancs indiscernables dans les cases sachant qu'une case peut comporter n'importe quel nombre de pions ?
3) De combien de façons peut-on placer 4 pions noirs indiscernables et 4 pions blancs indiscernables dans les cases sachant qu'une case ne peut comporter strictement plus d'un pion ?
4) De combien de façons peut-on placer 4 pions noirs indiscernables et 4 pions blancs indiscernables dans les cases sachant qu'une case peut comporter n'importe quel nombre de pions et à la fois des noirs et des blancs ?

Exercice 2 (9 points)
On dispose de deux urnes. L'urne numéro 1 possède au départ une boule blanche et une boule noire.
De même l'urne numéro 2 possède au départ une boule blanche et une boule noire.
On procède à l'expérience suivante :
On tire au hasard une boule dans l'urne numéro 1.
On tire au hasard une boule dans l'urne numéro 2.
On échange ensuite les deux boules, c'est à dire que la boule tirée dans l'urne numéro 1 est mise dans l'urne numéro 2 et la boule tirée dans l'urne numéro 2 est mise dans l'urne numéro 1.
On répète cette expérience et on note X_n le nombre de boules noires dans l'urne numéro 1 après n expériences.
On a donc $X_0 = 1$.
1) Pour $n \geq 1$, quelles sont les valeurs que peut prendre X_n ?
Donner le nombre de boules noires et blanches dans chaque urne après la n-ème expérience en fonction de X_n.
2) Donner la loi de X_1.
3) Déterminer pour tout $(i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$, pour tout $n \geq 1$, $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$.

4) On note pour $n \geq 0$, $a_n = P(X_n = 1)$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\begin{cases} P(X_n = 0) = \frac{1}{4}a_{n-1} \\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4}a_{n-1} \end{cases}$ et
Pour tout $n \geq 1$, $\qquad a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n-1}$.
5) Montrer que la suite $(a_n - \frac{2}{3})_{n\geq 0}$ est géométrique.
En déduire l'expression de a_n et la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ quand n tend vers l'infini.
Déterminer les limites de $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = 2)$ quand n tend vers l'infini.
6) Soit $T = \inf\{n \geq 1 / X_n = 0\}$.
Que valent $P(T = 1), P(T = 2)$ et $P(T = 3)$?
Montrer que la fonction génératrice de T notée g vérifie pour $s \in [0, 1]$:

$$g(s) = E[s^T] = \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}sg(s) + \frac{1}{4}s^2 g(s)$$

On pourra utiliser un arbre pour justifier cette formule.
En déduire la valeur de $g(s)$ et de $E[T]$.

Exercice 3 (7 points)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = xe^{-(1+y)x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$.
1) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admettant f comme densité.
Donner la loi de X, de Y.
3) La variable aléatoire X admet-elle une espérance, une variance ? Si oui calculez les.
Même question pour la variable aléatoire Y.
4) Donner la fonction de répartition de Y.
5) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{1+Y}$.
6) On pose $Z = XY$.
Déterminer la loi du couple (X, Z).
7) Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?