

# Diversité génétique dans le modèle Mendélien diploïde

## Projet Exploratoire CanDyPop

**Acteurs :** Anton BOVIER, Loren COQUILLE, Rebecca NEUKIRCH.

Collet, Méléard et Metz [2] ont étudié un modèle général de populations diploïdes dans lequel la capacité de chaque individu à survivre et se reproduire ne dépend que d'un trait phénotypique quantitatif déterminé par son génotype, et représenté par deux types d'allèles ( $a$  et  $A$ ). L'évolution de la distribution des traits dans la population résulte de trois mécanismes de base : l'hérédité (par reproduction mendélienne : le nouveau-né possède un génotype choisi au hasard chez chacun des deux parents), les mutations (d'autres types d'allèles peuvent apparaître à un taux  $\mu$ ) et la sélection (représentée par la différence de fertilité et de mortalité entre les traits, ainsi que par la présence d'un terme de compétition).

Sous les hypothèses que l'allèle  $A$  est récessif et que le type  $AA$  est le plus adapté (sa *fitness* est légèrement plus grande que celle de  $aa$  et  $aA$ ), ils étudient la limite des grandes populations et des mutations rares et prouvent la convergence du processus vers la solution d'un système de trois équations différentielles non-linéaires, où le trait mixte  $aA$  augmente, permet l'émergence du type  $AA$ , puis décroît exponentiellement.

Dans [1], Anton Bovier et Rebecca Neukirch montrent partiellement, en changeant les paramètres du modèle que la reproduction mendélienne peut augmenter la variabilité génétique d'une population. Ils font l'hypothèse que l'allèle  $A$  est cette fois dominant, et que les types  $aA$  et  $AA$  sont les plus adaptés (leur *fitness* est légèrement plus grande que celle de  $aa$ ). Ils prouvent que dans ce cas là, le type mixte  $aA$  décroît comme  $1/t$  et non exponentiellement. Cela permet à l'allèle récessif  $a$  de survivre beaucoup plus longtemps dans la population. Si l'échelle de mutation est choisie de telle sorte qu'il existe encore assez d'allèles  $a$  lorsqu'une mutation se produit, et que le nouveau mutant peut coexister avec la population inadaptée  $aa$ , alors la population  $aa$  doit pouvoir réapparaître. C'est la motivation de notre projet de recherche.

Le but de ce projet est d'obtenir un résultat quantitatif de variabilité génétique. Soit  $B$  est l'allèle mutant, il y a alors six génotypes possibles :  $aa$ ,  $aA$ ,  $AA$ ,  $aB$ ,  $AB$ ,  $BB$ . La dominance des allèles est la suivante  $a < A < B$ , l'allèle dominant définit le phénotype de l'individu (e.g.  $AB$  porte le phénotype  $B$ ).

Nous avons une compréhension heuristique du modèle qui nous mène à conjecturer est que sous les hypothèses suivantes, le système déterministe exhibe les propriétés demandées :

- la fertilité de tous les génotypes est la même,
- le phénotype  $a$  ne se reproduit pas avec le phénotype  $B$ ,
- les taux de morts sont décroissants avec le phénotype, i.e.  $d_a > d_A > d_B$ ,
- la compétition est donnée par la somme de deux termes : l'un « phénotypique » respectant la dominance des allèles ( $c(p_1, p_2) > c(p_2, p_1)$ , pour  $p_1 < p_2$ ) et l'autre dépendant (de manière décroissante) de la distance de Hamming entre les génotypes :  $\tilde{c}(g_1, g_2) = f(d_H(g_1, g_2))$ .

La dynamique qualitative du système est alors la suivante : d'abord le type  $BB$  envahit la population et supprime le type  $AA$ . Puis, par absence de compétition avec  $AA$ , le type  $aa$ , qui est toujours présent, croît jusqu'à coexister avec  $BB$ . Nous avons obtenu des simulations qui confortent ces prédictions, et notre projet est de prouver ce résultat rigoureusement, en approximant par morceaux ce système d'équations différentielles par un système de dimension plus petite.

## Références

- [1] A. BOVIER AND R. NEUKIRCH, *Survival of the recessive allele in the Mendelian diploid model*, (2015), pp. 1–43, arXiv :1505.02109v3.
- [2] P. COLLET, S. MÉLÉARD, AND J. A. J. METZ, *A rigorous model study of the adaptive dynamics of Mendelian diploids*, *J. Math. Biol.*, 67 (2013), pp. 569–607.