Métastabilité dans un modèle de dynamique des populations avec compétition

Projet Exploratoire CanDyPop

Acteurs : Anton BOVIER, Loren COQUILLE.

Ce projet est un problème de métastabilité dans un modèle de dynamique adaptative des populations. Considérons $L+1$ traits (ou types d'individus) $0, 1, \ldots, L$ et notons $X_i(t) \in \mathbb{N}$ le nombre d'individus de type i au temps t. L'évolution de la population est donnée par un processus de Markov sur $\mathbb{N}^{L+1}$, paramétré par les taux associés à chaque type i :

— taux de naissance d'un individu de type i : $(1-\varepsilon)b_i$,

— taux de mort d'un individu de type i : $d_i + \sum_i c_{ij} X_j$,

— taux de mutation d'un individu de type i : $\varepsilon b_i/2$ vers chaque trait plus proche voisin.

Une notion naturelle de “paysage de *fitness* ” $f : \{0, \ldots, L\} \times \{0, \ldots, L\} \to \mathbb{R}$ peut être définie en fonction des paramètres, où $f(i,j)$ mesure l'avantage sélectif du trait mutant i par rapport au trait résident j. En effet, si la population n'est constituée que d'individus de type j, la population moyenne tend vers la valeur d'équilibre $\bar{x}_j = (b_j - d_j)/c_{jj}$. La “*fitness* d'invasion” du trait mutant i dans la population résidente est son taux de naissance effectif : $f(i,j) = b_i - d_i - c_{ij}\bar{x}_j$.

Nous nous intéressons au problème de métastabilité suivant. Supposons que la population de départ soit uniquement constituée d'individus de type 0, et que le paysage de *fitness* satisfasse les hypothèses suivantes :

$$
\begin{aligned}
&f(i,0) < 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, L-1 \text{ et } f(L,0) > 0.\\
&f(i,L) < 0 \text{ pour } i = 0, \ldots, L-1.
\end{aligned}
$$

Alors le type L a un avantage sélectif sur tous les autres traits, mais pour atteindre ce type, la population initiale doit créer des mutants de types intermédiaires qui sont moins adaptés (car on suppose que les mutations se font seulement vers les traits plus proches voisins). La question est alors la suivante : quel temps faut-il attendre en moyenne pour observer une population macroscopique de type L ?

Nous voulons répondre à cette question dans la limite des grandes populations et des petits taux de mutation. Plus précisément, nous nous intéressons au processus renormalisé $X^K(t)/K$ dont les taux de saut sont accélérés d'un facteur K, et la compétition divisée par K, et nous considérons les limites

— $K \to \infty$ suivie de $\varepsilon \to 0$ (limite déterministe),

— $(K, \varepsilon) \to (\infty, 0)$ avec une vitesse $\varepsilon(K)$ régulant la fréquence des mutations (le processus reste stochastique et les questions naturelles de métastabilité se posent).

Une adaptation du résultat de Fournier et Méléard [2] assure que dans la limite $K \to \infty$ (avec ε fixé), le processus renormalisé $X^K(t)/K$ converge vers un processus déterministe $x^\varepsilon = (x_0^\varepsilon, \ldots, x_L^\varepsilon)$ qui est solution d'un système d'équations différentielles explicite. Dans l'esprit de [1], nous avons d'abord étudié ce système dynamique dans la limite $\varepsilon \to 0$, et avons prouvé que le temps de sortie du puits est d'ordre $\log(1/\varepsilon)$.

La motivation initiale pour étudier ce modèle est l'observation d'un comportement métastable de la population qui "traverse un puits de *fitness* ". Lorsque le nombre de mutant dans le puits n'est pas macroscopique, il est très probable que leur population s'éteigne avant d'avoir produit assez de mutants qui auraient une chance de sortir du puits. On s'attend donc à ce que ce temps de sortie soit aléatoire, et dépende des fluctuations du nombre de mutants intermédiaires. Nous avons obtenu des simulations qui confortent ces prédictions, et notre projet consiste à prendre la limite $(K, \varepsilon) \to (\infty, 0)$ avec une vitesse telle que $\varepsilon K \ll 1$ et

— déterminer la loi du temps de sortie du puits (il n'y a pas de raison a priori pour que cette loi soit exponentielle). Plus précisément nous cherchons une asymptotique de la probabilité $\mathbb{P}(\tau_{L,\eta} > r)$ avec $\tau_{L,\eta} = \inf\{t \geq 0 : X_L^K > \eta\}$, $\eta > 0$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

— déterminer quelles sont les stratégies qu'utilise le système lorsque l'on conditionne la valeur de $\tau_{L,\eta}$; c'est-à-dire déterminer le profil typique de la population de mutants qui a permis à la population plus adaptée d'aparaître après un temps donné.

Références

[1] A. Bovier and S.-D. Wang, *Trait Substitution Trees on Two Time Scales Analysis*, Markov Processes and Related Fields, 19 (2013), pp. 607–642.

[2] N. Fournier and S. Méléard, *A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations*, Ann. Appl. Probab., 14 (2004), pp. 1880–1919.