Convergence des produits

Proposition 1.2.15 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ et $f, g : I \to \mathbb{C}$. On suppose que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ uniformément sur I. Alors :*

1. *la suite $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $f + g$,*
2. *si f et g sont bornées sur I, alors la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg sur I.*

Prop : si $(a_n), (b_n)$ réelles ou complexes convergent, alors $(a_n b_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

démo : si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$,

- $$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n \underbrace{(b_n - b)}_{\downarrow n\to\infty \; 0} + \underbrace{(a_n - a)}_{\downarrow n\to\infty \; 0} b$$

ou • $\begin{cases} a_n = a + \alpha_n \\ b_n = b + \beta_n \end{cases}$ $\quad \alpha_n = a_n - a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\quad \beta_n = b_n - b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{\alpha_n b}_{\downarrow n\to\infty \; 0} + \underbrace{\beta_n a}_{\downarrow n\to\infty \; 0} + \alpha_n \beta_n$$

$\square$

démo de la prop 1.2.15

On écrit $\begin{cases} f_n = f + u_n \\ g_n = g + v_n \end{cases}$

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} 0$ $\quad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} 0$ sur I.

$$f_n g_n - fg = f v_n + g u_n + u_n v_n.$$

$u_n \cdot v_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} 0$

Pb : $f v_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} 0$? $\quad g u_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} 0$?

$$\|f v_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)\, v_n(x)|$$

car $\begin{cases} |f| \geq 0 \\ |v_n| \geq 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\leq \sup_{x\in I} |f(x)| \cdot \underbrace{\sup_{x\in I} |v_n(x)|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

si $\|f\|_\infty < +\infty$, $\|g\|_\infty < +\infty$,

alors
$$\|f_n g_n - fg\|_\infty = \|f v_n + g u_n + u_n v_n\|_\infty$$
$$\leq \|f v_n\|_\infty + \|g u_n\|_\infty + \|u_n v_n\|_\infty$$
$$\leq \underbrace{\|f\|_\infty}\cdot \underbrace{\|v_n\|_\infty}_{\downarrow n\to\infty\ 0} + \underbrace{\|g\|_\infty}\underbrace{\|u_n\|_\infty}_{\downarrow n\to\infty\ 0} + \underbrace{\|u_n\|_\infty \|v_n\|_\infty}_{\searrow\swarrow\ 0}$$

Donc $\|f_n g_n - fg\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (sur I) vers une fonction f mais la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f^2.

$$\left(f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x + \frac{1}{n} \end{array} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{U} \left(f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x \end{array} \right)$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f_n^2 : x \longrightarrow x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$f_n^2 - f^2 : x \longrightarrow \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\|f_n^2 - f^2\|_\infty = +\infty \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$