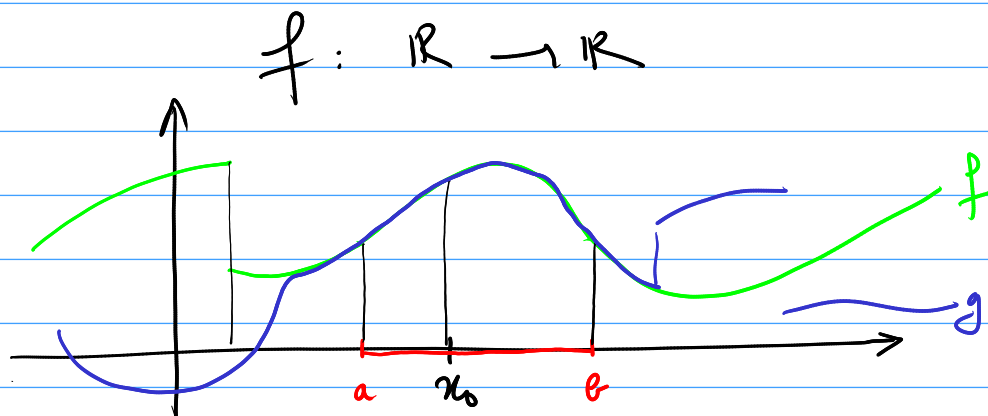


La continuité, propriété locale



Fait Soit $a < x_0 < b$.
 f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f|_{]a, b[} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 .

Cro $a < x < b$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f|_{]a, b[} = g|_{]a, b[}$.
 Abs f est continue en $x_0 \Leftrightarrow g$ est continue en x_0 .

Cro $a < b$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
 ① f est continue en tout point de $]a, b[$.
 ② $f|_{]a, b[}$ est continue.

Remarque: Faire si on remplace $]a, b[$ par $[a, b]$.

Preuve du fait

① f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

② $f|_{]a, b[}$ est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

① \rightarrow ② : $]a, b[\subset \mathbb{R} \dots$

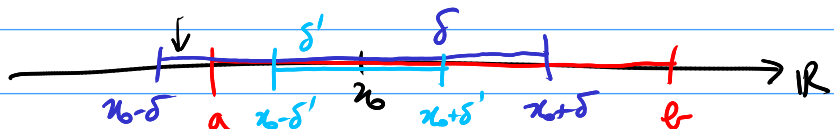
② \rightarrow ① :

On utilise ②.

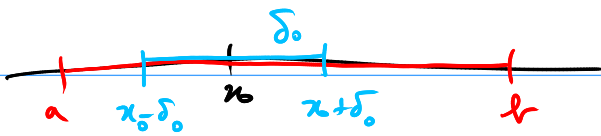
Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tq.

$$\forall x \in]a, b[\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\text{On pose } \delta' = \min\left(\delta, \frac{|a - x_0|}{2}, \frac{|b - x_0|}{2}\right) > 0.$$



Fait: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, |\epsilon - \epsilon_0| < \delta' \Rightarrow \left| \begin{matrix} |\epsilon - \epsilon_0| < \delta \\ \epsilon \in]a, b[\end{matrix} \right. \Rightarrow |f(\epsilon) - f(\epsilon_0)| < \epsilon.$ ◻

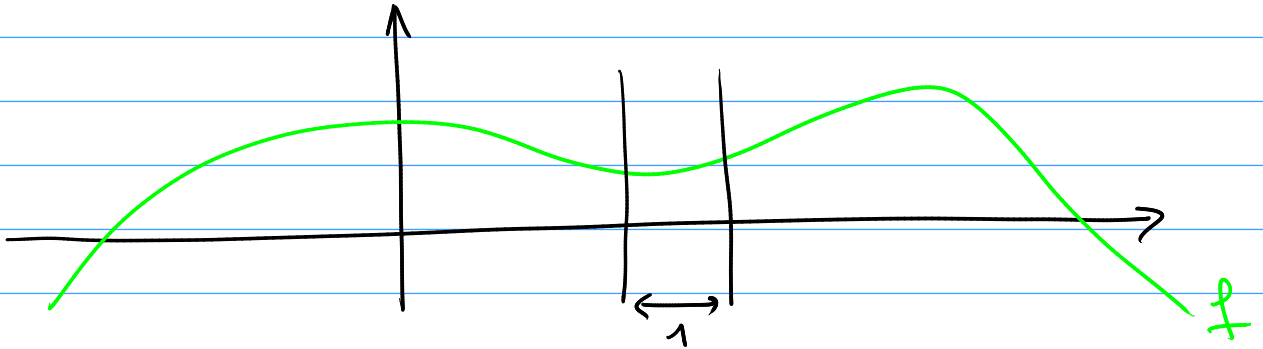


Coro

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

f est continue $\Leftrightarrow \forall a < b$ $f|_{]a, b[}$ est continue.

$\Leftrightarrow \forall a$ $f|_{]a, a+1[}$ est continue.



Fait

f est continue $\Leftrightarrow \forall a < b$ $f|_{[a, b]}$ est continue.

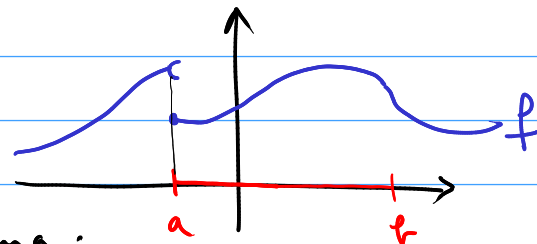
\Downarrow
 $\forall a < b$ $f|_{]a, b[}$ est continue.



① f est continue en tout point de $[a, b]$

② $f|_{[a, b]}$ est continue.

① \Rightarrow ② mais ② $\not\Rightarrow$ ①



ici f n'est pas continue en a :