Exercice 1.

Soit X une variable de Bernouilli égale à 1 avec probabilité p. Calculer son moyen et sa variance et montrer que sa variance est $\leq 1/4$. Pour tout $\epsilon, \delta > 0$, trouver un n tel que

$$P(|\frac{\sum_1^n X_i}{n} - p| \geq \epsilon) \leq \delta.$$

ou les X_is sont des variables aléatoires indépdendentes identiquement distribuées de loi de Bernouilli de paramètre p.

Exercice 2.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendentes identiquement distribuées dont la fonction de distribution est F. Soit $\overline{F}(t)$ la variable aléatoire donnée par

$$\overline{F}(t) = \mathrm{Card}\{i | X_i \leq t/n\}.$$

Trouver une borne pour $P(|F(t) - \overline{F}(t)| < \epsilon)$ qui ne dépende que de n et ϵ.

Exercice 3.

(1) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. Soit μ le moyen des X_is et soit σ^2 la variance des $X_i s$. On pose

$$M = \frac{\sum_1^n X_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_1^n (X_i - M)^2}{n-1}.$$

Trouver $\mathbb{E}(M)$ et $\mathbb{E}(S^2)$.

(2) On suppose maintenant que les X_is sont des variables normales de moyen μ et variance σ^2. Montrer que le loi de (S^2/σ^2) ne dépende que de n (en particulier, cette loi ne dépende pas de μ et σ). Montrer que $Z = \frac{\sqrt{n}(M-\mu)}{\sigma}$ suit une loi normale de moyen 0 et variance 1.

(3) Montrer que S^2 et M sont des variables indépendantes. (Indice : introduire des nouvelles variables $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ données par $Y_i = X_i - M$.)

(4) On pose $T = \sigma Z/S$. Montrer que la variable réelle T a une loi qui ne dépende que de n. (En particulier, cette loi ne dépende ni de σ^2 ni μ.)

(5) Soit μ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ associée à la variable t. Montrer que si $[-A, A]$ est une intervalle telle que $\mu([-A, A]) \geq 1 - \epsilon$ alors

$$P(M - \frac{AS}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq M + \frac{AS}{\sqrt{n}}) \geq 1 - \epsilon.$$

Commenter ce résultat. De quelles données doit-on disposer pour pouvoir calculer l'intervalle $[M - \frac{AS}{\sqrt{n}}, M + \frac{AS}{\sqrt{n}}]$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que $X \subset [a, b]$ avec probabilité 1. Soit ϕ une fonction convexe et continue définie sur $[a, b]$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \leq \frac{b - \mathbb{E}(X)}{b - a}\phi(b) + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{b - a}\phi(a).$$