TD 3: Esperance.

Exercice 1.

(1) Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
(2) Soit X une variable aléatoire de distribution exponentielle de paramètre λ. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.
(3) Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité $\frac{e^{(x-\mu)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$.

Exercice 2.

Julie achète un paquet de cornflakes par jour ; la companie de cornflakes lui fait cadeau d'une figurine en plastique à chaque fois. Il y a n figurines différentes et la probabilité que le ième paquet de cornflakes contient une figurine de type j est $\frac{1}{n}$. Les contenus des paquets de cornfalkes différents sont independants. Soit m le nombre de jours que Julie doit attendre avant d'avoir une collection de toutes les figurines. Calculer $E(m)$.

Exercice 3.

Un sale gosse joue avec son plat de spaghetti au lieu de le manger. Il y a n spaghettis dans son assiette. Il attrape un bout d'un spaghetti et l'attache à un autre bout de spaghetti, choisi au hasard et uniformement parmi les $(2n-1)$ bouts restant. Il continue jusqu'à ce que son assiette contienne a anneaux de spaghetti. Calculer $E(a)$.

Exercice 4.

On considère une population de bactéries. Au temps $t = 0$ il y a m bactéries. Entre les temps n et $n+1$, chaque bactérie meurt avec une probabilité p et se divise en deux bactéries avec une probabilité $q = 1-p$, indépendamment de toutes les autres bactéries. Soit A_n la taille de la population en temps n. En considérant $E(A_n)$ trouver une borne supérieure pour $P(A_n = 0)$ si $p > 1/2$ et $n1$. En déduire que la population s'éteindra presque sûrement.

Exercice 5.

Le roi de Transoxiana, inquiet de la surpopulation, souhait interdire aux couples d'avoir plus d'un enfant. Comme la tradition transoxiane insiste sur l'importance des filles, il assouplit la loi et propose d'interdire seulement aux couples ayant déjà une fille d'avoir d'autres enfants.

On suppose que le nombre d'enfants qu'un couple est capable d'avoir est un variable de Poisson de variable λ, que tout couple, tant qu'il n'a pas eu de fille, continue à avoir des enfants si possible, que la probabilité d'obtenir une fille à chaque naissance est $1/2$, et que les sexes des bébés successifs sont indépendants. Calculer, pour un couple donné, $E(F)$ et $E(G)$, où F est le nombre de filles qu'ils auront et G est le nombre de garçons.

Exercice 6.

Une personne joue à la roulette. Chaque jour elle gagne 1000 euros avec probabilité p et perd 1000 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si elle arrive un jour à 0 euros elle est ruinée et doit s'arrêter ; si elle arrive à 1000N euros elle s'arrête et s'achète une Rolex, s'estimant heureuse d'avoir réussi sa vie. Ici, N est un entier fixé.

Soit p_n la probabilité qu'elle finira ruinée si elle commence avec $1000n$ euros. Trouver une relation de récurrence liant les p_n. Trouver toutes les solutions de cette récurrence qui sont de la forme $r_n = \theta^n$. En déduire p_n pour tout n si $p \neq q$. Que se passe-t-il si $p = q$?

Soit maintenant D_n le nombre de jours avant que le jeu ne s'arrête et soit $E_n = E(D_n)$. Trouver une relation de récurrence pour les E_n, chercher une solution particulière pour cette relation et en déduire la valeurs des E_n. (Le cas ou $p = q$ nécessite un traitement particulier.)

La personne devient dépendante du mirage de l'argent facile et ne pourra plus s'arrêter tant qu'elle a de l'argent. Montrer que si $p \geq q$, alors sa ruine est certaine. Que se passe-t-il si $p < q$?

Exercice 7.

Donner un exemple d'une variable aléatoire réelle X telle que X est finie presque surement mais $E(X) = \infty$.