Fonctions génératrices et caractéristiques.

Exercice 1.

Calculer la fonction caractéristique de X lorsque X :

(1) suit une loi exponentielle de paramétre λ,
(2) suit une loi uniforme sur $[a, b]$
(3) est la somme de deux variables indépendantes Y et Z qui suivent des lois exponentielles de paramètre λ et μ,
(4) est égale à Y^2, ou Y suit une loi normale $N(0, 1)$,
(5) est un produit YZ, ou Y et Z sont des variables indépendantes admettant des fonctions de densité f et g respectivement (laisser votre réponse en forme intégrale)
(6) suit une loi binomiale $B(n, p)$.

Exercice 2.

Pour tout $a > 0$ on pose $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^a dx$. On considère la fonction $\gamma_{a,\lambda}$ donnée par $\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda a}}{\Gamma(a)} 1_{x>0}$.

(1) Montrer que $\gamma_{a,\lambda}$ est une fonction de densité pour tout $a, n > 0$.
(2) Calculer la fonction caractéristique de X, ou X est une variable aléatoire réelle admettant $\gamma_{a,\lambda}$ comme densité. (Indice : pour calculer $f(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu x} x^a dx$ pour des valeurs complexes de μ, dériver sous la signe de somme et chercher une équation différentielle.
(3) Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois $N(0, 1)$. Soit $X = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2$. Calculer la fonction caractéristique de X et montrer que X admet une densité qu'on trouvera.

Exercice 3.

Soit (X_k) une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de même loi et fonction caractéristique ϕ. On pose $S_n = \sum_1^n X_k$, avec la convention $S_0 = 0$. Soit $N = \sum_{n=1}^\infty 1_{S_n=0}$. (Note que N peut être $= \infty$.)

(1) Montrer que $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,pi]} \phi(t)dt$.
(2) Soit τ le premier temps de retour en 0. (Note que τ peut, lui aussi, être infini.) En conditionant sur l'évènement "τ est infini", montrer que la fonction génératrice de N est égale à $g(t) = \frac{1-a}{1-at}$, ou $a = P(\tau < \infty)$.
(3) Montrer que $P(N = \infty)$ vaut 1 ou 0 et que si $P(N = \infty) = 0$ alors N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$.
(4) Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$

$$\frac{1}{2\pi} R(\int_{[-\pi,pi]} \frac{1}{1 - r\phi(t)} dt) = \sum_{n \geq 0} r^n P(S_n = 0).$$

(5) Montrer que $N = \lim_{r \to 1^{-1}} \frac{1}{2\pi} R(\int_{[-\pi,pi]} \frac{1}{1-r\phi(t)} dt)$. Que peut-on dire sur $\phi(t)$ quand $P(N < \infty) = 1$.

Exercice 4.

On considère une population de bactiéries. Le jour 0, il y a une unique bactérie. Chaque jour, chaque bactérie subit un certain nombre de divisions et donne naissance le jour suivant à un nombre N de bactéries. On a que $N = n$ avec probabilité n et on suppose qu'il existe un m tel que $P(N \geq m) = 0$. Soit G la fonction génératrice de N. On suppose que les destins de bactéries différentes sont indépendentes.

On note T_i le nombre de bactéries présentes le jour i. On s'intéresse à la probabilité p que la lignée des bactéries s'éteint. Soit G_i la fonction génératrice de T_i.

(1) Montrer que si M_n est la nombre de bactéries produites dans une journée par une population initiale de n bactétries, alors la fonction génératrice de M_n est $G(z)^n$.

(2) En déduire que $G_n(z) = G_{n-1}(G(z))$ et donc $G_n(z) = \overbrace{G \circ G \circ \ldots \circ G}^{n \text{ fois}}(z)$.

(3) Montrer que $p = \lim_{n\to\infty} \overbrace{(G \circ G \circ \ldots \circ G)}^{n \text{ fois}}(z)$. Montrer que la suite $u_n = \overbrace{(G \circ G \circ \ldots \circ G)}^{n \text{ fois}}(z)$ est croissante et qu'elle converge. Montrer que $G(p) = p$.

(4) Montrer que $G'(z)$ est croissante sur $[0, 1]$. En déduire que si $G(z) \neq z$ alors l'équation $G(z) = z$ a au plus une solution sur $[0, 1[$.

(5) Montrer que si l'équation $G(z) = z$ a une solution y sur $[0, 1[$ alors $p = y$. Montrer que sinon $p = 1$.

(6) Montrer que $p = 1$ ssi $E(N) \leq 1$ et $P(N = 1) \neq 1$.