TD 2 : fonctions de répartition de fonctions densité.

Exercice 1.

Pour chacun des fonctions f suivantes, montrer qu'elle est un densité de probabilité et calculer la fonction de répartition correspondante.

(1) $f(x) = 0$ si $x \leq a$ et $f(x) = \frac{3a^3}{x^4}$ si $x \geq a$, ou $a0$.
(2) $f(x) = xe^{-x}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.
(3) $f(x) = e^{-(x+e^x}$.
(4) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{x^{2n+1}e^{-x^2/2}}{2^n n!}$ si $x \geq 0$ (Utiliser une récurrence sur n pour la première partie).

Exercice 2.
Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables réelles independentes identiquement distribuées de fonction de répartition F et fonction densité f. On suppose que F est dérivable en dehors d'un nombre fini de points. Trouver la fonction de répartition et la fonction densité de $U = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

Exercice 3.
Soit X une variable réelle de fonction de répartition F. Trouver les fonctions de répartition des variables réelles suivantes:

$$X^3, \log X, e^X, X^2, X^2 - 4X + 1$$

En supposant que F est dérivable en dehors d'un nombre fini de points, trouver la fonction densité de ces variables aléatoires.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Donner la fonction de répartition de X', la troncation de X donnée par $X' = -a$ si $X \leq -a$, $X' = X$ si $-a \leq X \leq a$ et $X' = a$ si $X \geq a$, ou a est un nombre réel positif.

Exercice 5.
Soit X un variable uniforme sur $[1, 5]$. Donner la fonction de répartition et la fonction densité du variable $Y = \frac{X}{5-X}$.

Exercice 6.
Soit X une variable aléatoire réelle telle que la fonction de réparition de X est continue. On suppose que $P(X \geq t+s | X \geq s) = P(X \geq t)$ pour tout $t, s \geq 0$. Montrer que X a une distribution exponentielle.

Exercice 7.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires independentes uniformement distribuées sur $[0, 1]$. Soit $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ les nombres X_i organisé en taille croissante. Calculer la fonction de répartition de $X_{(k)}$ (laissez cette expression en forme d'une somme). Montrer que pour k fixe la fonction de répartition de $nX_{(k)}$ converge quand $n \to \infty$.