TD 0 : remise en route et probabilités na ives.

Exercice 1.

Une personne écrit des lettres personnelles à n correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresse au hasard.

Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ?

Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ? Calculer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Exercice 2.

Dans une classe de n personnes, quelle est la probabilité qu'au moins 2 aient le même anniversaire? Calculer numériquement cette probabilité pour $n = 20$, $n = 25$, $n = 30$.

Exercice 3.

Un test médical est utilisé pour dépister une maladie rare. Le test détecte toujours la maladie quand elle est présente, mais donne dans $0,3\%$ des cas un résultat positif quand la personne testée est saine.

Si $0,2\%$ de la population est affectée, quelle est la probabilité qu'une personne testée au hasard et dont le résulte au test est positif soit effectivement malade ?

Exercice 4.

On jette 3 dés indépendants. Quelle est la probabilité que la somme des trois résultats soit 10 ? Quelle est la probabilité que la somme des trois résultats soit 9 ? Combien de combinaisons de trois entiers entre 1 et 6 y a-t-il dont la somme est 9 ? dont la somme est 10 ?

Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire discrète $X \in \mathbb{N}$ telle que $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!e^\lambda}$. On dit alors que X est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable aléatoire discrète $Y \in \mathbb{N}$ telle que $P(Y = n) = \frac{\mu^n}{n!e^\mu}$. On suppose que pour tout n, m on a que $P(X = n, Y = m) = P(X = n) \cdot P(Y = m)$ (en d'autres termes, X et Y sont *independants*). Calculer la distribution de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 6.

Dans un jeu de 52 cartes, deux cartes sont choisies au hasard. Trouver la probabilité des événements suivants :

(1) Evénement A : les deux cartes sont des as,

(2) Evénement B : au moins une des deux cartes est un as,
(3) Evénement C : une des deux cartes est l'as de coeur.

Calculer les probabilité $P(A|B)$ et $P(A|C)$. Commenter vos résultats.

Exercice 7.

Une pièce qui tombe sur face avec une probabilité p est lancée n fois. Soit E l'événement "le premier lancée de pièce donne face" et soit F_k l'événement "on obtient au total exactement k faces". Pour quelles valeurs de k, n a-t-on que

$$P(E \cap F_k) = P(E) \cdot P(F_k)?$$

Exercice 8.

Soient X et Y des variables aléatoires entiers indépendants de distribution de Possion de paramètres λ et μ respectivement. Montrer que la probabilité $P(X = m|X+Y = n) = \binom{n}{m}(\frac{\lambda^m \mu^{n-m}}{(\lambda+\mu)^n})$ for all $0 \leq m \leq n$.

Exercice 9.

Deux joueurs, A et B, tirent tour à tour à l'arc. A tire en premier et les résultats des tirs différents sont indépendants. Chaque fois que A tire, il touche la cible avec une probabilité p_A: chaque fois que B tire, il touche la cible avec un probabilité p_B. Le premier jouer qui touche le cible gagne. Quelle est la probabilité que A gagne ?

Exercice 10.

Une molécule chimique a deux formes a et b, et peut passer de l'une à l'autre. Si au temps $t = n$ la molécule adopte la forme a alors la probabilité qu'elle adopte la forme b au temps $t = n + 1$ est p. Si au temps $t = n$ la molécule adopte la forme b alors la probabilité qu'elle adopte la forme a au temps $t = n + 1$ est q. Soit p_n la probabilité que la molécule adopte la forme a au temps n et soit q_n la probabilité que la molécule adopte la forme b au temps n. Les changements intervenus entre les temps n et $n + 1$ sont supposés indépendents des changements intervenus entre les temps m et $m + 1$ quand $n \neq m$.

(1) Trouver une matrice M telle que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$$

pour tout n.

(2) En diagonalisant M, en déduire $\lim_{n\to\infty} p_n$ en terme de p_0 et q_0.