Controle Continu 2.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdites.

Questions de cours.

(1) Enoncer l'inégalité de Tchebycheff. Enoncer la loi forte des grands nombre et la démontrer en utilisant l'inégalité de Tchebycheff.

(2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Cauchy (c-a-d, admettant $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ comme densité. Montrer que $\frac{{}_{i=1}^{n} X_i}{n}$ suit aussi une loi de Cauchy. (Vous pouvez utiliser le fait que la fonction caracteristique d'une variable de Cauchy est $e^{-|t|}$). Pourquoi est ce que cet exemple ne contredit pas la loi forte des grands nombres?

Exercice 1.

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et fonction caracteristique ϕ. On suppose que $P(X_i \in \mathbb{Z}) = 1$. On définit des variables aléatoires S_k par

- $S_0 = 0$
- $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

On définit une variable aléatoire N par $N = \sum_{n \geq 1} 1_{S_n=0}$, le nombre total de retours à l'origine de la suite S_k. (Noter qu'il est possible d'avoir $N = \infty$).

(1) Soit $\tau = \min\{n|n \geq 1, S_n = 0$. (Il est donc possible que $\tau = \infty$). Soit $a = \mathbb{P}(\tau < \infty)$. En conditionnant sur l'évènement $\tau = \infty$, montrer que $\mathbb{P}(N = k+1) = a\mathbb{P}(N = k)$ pour tout $k \geq 0$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(N = 0) = 1 - a$ et en déduire que pour tout $z \in]-1, 1[$ on a que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)z^n = \frac{1-a}{1-az}$.

(3) En prenant la limite de $g(z)$ quand z converge vers 1, montrer que $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$ si $a < 1$ et $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$ si $a = 1$.

(4) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)dt = 2\pi\mathbb{P}(X_1 = 0)$.

(5) Utilisant le fait que la fonction caractéristique de S_n est $\phi(t)^n$, montrer que pour tout $r \in [0, 1[$ on a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - r\phi(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathbb{P}(S_n = 0).$$

(6) Montrer que $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ si et seulement si $\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-r\phi(t)} dt < \infty$.

Exercice 2. On considère des variables aléatoires $V_n = (X_n, Y_n) \in \mathbb{Z}^2$ défini récursivement comme suit :

- $V_0 = (0, 0)$
- $V_n = V_{n-1} + \epsilon_n$, ou les variables $\epsilon_n \in \mathbb{Z}^2$ ont une distribution uniforme sur l'ensemble $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ est sont indépendantes entre elles.

(1) Montrer que X_n et Y_n suivent la même loi.

(2) Justifier que V_{n-1} et ϵ_n sont indépendantes.

(3) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$. Montrer que pour tout n $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{n}{2}$ et calculer $\mathrm{Var}(X_n)$.

(4) Calculer $\mathbb{E}(X_n Y_n)$ pour tout n et en déduire que X_n et Y_n ne sont pas corrélés. Montrer que X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

(5) On considère la fonction $g_n(z, w) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(V_n = (i, j)) z^i w^j$. Justifier que $g_n(z, w)$ existe pour tout $z, w \in (\mathbb{C}^*)^2$.

(6) Montrer que $g(z, w) = (\frac{(z+1/z+w+1/w)}{4})^n$. (Indice : commencer pour trouver la fonction génératrice de ϵ_n.) En déduire pour tout n la probabilité $\mathbb{P}(V_n = (0, 0))$.