Controle Continu 1.
Documents, calculatrices et téléphones portables interdites.

Questions de cours.

(1) Soient X, Y des variable aléatoires réelles.
   (a) Que veut dire l'énoncé "X et Y sont indépendantes" ?
   (b) On suppose que X et Y admettent pour densité des fonctions f et g respectivement. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si le couple (X, Y) admet pour densité la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ donnée par
$$h(x, y) = f(x)g(y).$$
(2) Enoncer l'inégalité de Jensen.

Exercice 1.

Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ indépendantes de même loi admettant comme densité $f_X(x) = 1_{x>0}\lambda e^{-\lambda x}$.

(1) Montrer que l'application: $\phi : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}^{+*2}$ donnée par $\phi(x, y) = (x+y, \frac{x}{y})$ est un diffeomorphisme.
(2) Montrer que le couple $(U, V) = (X + Y, \frac{X}{Y})$ admet une densité que l'on calculera
(3) Montrer que U et V son indépendantes et admettent des densités données par $f_U(u) = \lambda u e^{-\lambda u}$ et $f_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}$.
(4) En déduire que les variables U et $W = \frac{X-Y}{X+Y}$ sont indépendantes. Montrer que W admet une densité qu'on calculera. (Ecrire W comme une fonction de V).
(5) Soient $s, a \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer la probabilité conditionelle $P(X \geq s|V \leq a)$.
(6) Calculer les fonction de répartition F_U et F_V.
(7) Calculer $\mathbb{E}[1/U]$. Montrer que $\mathbb{E}[1/X] = +\infty$.

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli- c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n prend la valeur 1 avec probabilité p et X_n prend la valeur 0 avec probabilité $q = 1 - p$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ et on pose $M_N = X_1 + \ldots + X_N$.

(1) Calculer $E(M_N)$.
(2) Justifier le fait que pour tout $m \in [0, \ldots, N]$
$$p_m = P(M = m) = \binom{N}{m} p^m (1 - p)^{N-m}.$$
(3) Calculer $E(M_N(M_N - 1))$ et $E(M_N^2)$.
(4) En regardant la quantité p_{m+1}/p_m, montrer que le maximum de $P[M_N = m]$ est réalisé pour $m = \lceil Np - q \rceil$. Ici, pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier x supérieur ou égal à x.

Exercice 3.

Soit $s > 1$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P[N = n] = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$, ou ici $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Pour tout entier $a \in \mathbf{N}^*$, on note A_a l'événement " a divise N".

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ $P(A_a) = a^{-s}$.

(2) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(A_a \cap A_b)$. (On notera m le PPCM de a et b.) À quelle condition sur a et b les événements A_a et A_b sont-ils indépendants?

(3) Etant donnés des nombres premiers distincts $p_1, \ldots, p_n$, calculer

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_n}).$$

En déduire que les événements A_p pour $p \in \mathbf{P}$ sont indépendants.

(4) Calculer de deux manières la probabilité de $\bigcap_{p \in \mathbf{P}} A_p^c$ et en déduire une formule pour $\zeta(s)$.