Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
1. Montrer que si f est paire alors sa série de Fourier est une série de cosinus.
2. Montrer que si f est impaire alors sa série de Fourier est une série de sinus.

Exercice 2. Trouver les coefficients de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. Trouver les coefficients de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Exercice 4. Trouver les coefficients de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3.$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 5. Déterminer le développement en série de sinus de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1.$$

Exercice 6. Déterminer le développement en série de cosinus de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

◇