**MAT244 - Année scolaire 2005-2006**
**Mathématiques**

# Feuille d'exercices n°4

**Exercice 1.**

Pour chaque matrice symétrique suivante, déterminer les valeurs propres et une matrice orthogonale $P$ de changement de base qui la diagonalise :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

**Exercice 2.**

Réduire les formes quadratiques suivantes avec des changements de base orthogonaux.

1. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
2. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz.$

**Exercice 3.**

Trouver le genre des coniques suivantes :

1. $x^2 - xy + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$
2. $3x^2 + 5xy + 2y^2 + 2x + y - 1 = 0$

**Exercice 4.**

Trouver les équations réduites dans des repères orthonormées des coniques suivantes. En déduire s'il existe un centre, les co-ordonnées du centre, les longeurs des demi-axes et, le cas échéant, les équations des asymptotes. Dessiner chaque conique.

1. $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0,$
2. $xy + 2x + y = 0,$
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0,$
4. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0,$
5. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0,$
6. $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0,$
7. $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0.$

**Exercice 5.**

Pour quels valeurs de $\lambda$ est ce que la conique d'équation $x^2 + \lambda xy + y^2 - 1 = 0$ une ellipse ? Dessiner cette conique pour $\lambda = 0, 2$ et $3$.

**Exercice 6.**

Pour quels valeurs de $a, b, c, d$, et $e$ est ce que l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

définit un cercle ? Exprimer le rayon et les coordonnées du centre en fonction des coefficients de l'équation.

**Exercice 7.**

1. Soit $P = (v_1 v_2 \dots v_n)$ une matrice : ici $v_i$ est un n-vecteur colonne. Montrer que $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, le produit scalaire canonique de $v_i$ et $v_j$.
2. Soit $E$ un espace euclidien et soit $B_1$ une base orthonormée pour $E$. Soit $B_2$ une autre base pour $E$. Montrer que $B_2$ est orthonormée si et seulement si la matrice de changement de la base $P$ est une matrice orthogonale.

**Exercice 8.**

Soit $f$ une endomorphisme linéaire d'un espace $E$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(v, w) = \langle v, f(w) \rangle$ est une application bilinéaire.
2. Soit $B$ une base de $E$. Soit $M$ la matrice de l'application linéaire $f$ dans la base $B$. Soit $N$ la matrice de l'application bilinéaire $\phi$ dans la base $B$. Montrer que si $B$ est une base orthonormée alors $M = N$.
3. Montrer que réciproquement si $B$ n'est pas orthonormée alors $M \neq N$.

**Exercice 9.**

Considérons l'espace euclidien usuel de dimension 3, noté $(\mathbb{R}^3, < \cdot, \cdot >)$, orienté par sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Donner une base orthonormale des sous-espaces vectoriels suivants : $\{\vec{i} - 3\vec{j}\}$,$\{\vec{i} + \vec{k}\}$, $\{\vec{i} - \vec{j}, \vec{k} - 2\vec{j}\}$ et $\{2\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}\}$.
2. Considérons sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique $q$, définie, pour tout vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique, par $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + 4z^2$.
   (a) Démontrer que $q$ définit une nouvelle structure euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

(b) Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ $q$-orthonormale.

(c) Donner de même des bases $q$-orthonormales des sous-espaces vectoriels suivants : $\{\vec{i}+\vec{k}\}$, $\{\vec{i}-\vec{j}, \vec{k}-2\vec{j}\}$ et $\{2\vec{i}+\vec{j}, \vec{j}+\vec{k}\}$.

**Exercice 10.**

Donner une preuve de l'inégalité de Schwarz (dont on traitera soigneusement le cas d'égalité) pour un produit scalaire quelconque sur un espace euclidien.

**Exercice 11.**

1. Ecrire la matrice de la réflexion de $\mathbb{R}^2$ par rapport à une droite d´´equation $ax + by = 0$. Vérifier les cas particuliers où $(a, b) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$.
2. Ecrire la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\theta$.
3. Ecrire la amtrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle $\theta$.

**Exercice 12.**

Montrer que le produit de deux réflexions dans $\mathbb{R}^2$ est une rotation dans $\mathbb{R}^2$.