MAT244 - Année scolaire 2005-2006
Mathématiques

Feuille d'exercices n°3

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique qui à un polynôme associe son discriminant :

$$\Delta \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$$
$$P(X) = aX^2 + bX + c \mapsto \Delta(P) = b^2 - 4ac$$

1. Donner la forme polaire $\mathcal{B}$ associée à Δ.
2. Donner la matrice de la forme polaire $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}_0 = \{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire :
$$\Delta(P) = b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2.$$
4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1 = \{\frac{1}{2}(X^2-1), X, \frac{1}{2}(X^2+1)\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{F}_0$ à la base $\mathcal{F}_1$.
6. Donner les coordonnées du polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathcal{F}_1$.
7. Donner la matrice de la forme polaire $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}_1$.
8. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}_1$.
9. Donner le rang et la signature de Δ.

Exercice 2.
Sur $M_n(\mathbb{R})$ on considère la forme $\tau(A,B) = \mathrm{Tr}(A.B)$ où Tr est la trace d'une matrice. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée (calculer $\tau({}^tAA)$).

Exercice 3.
On se donne les deux formes quadratiques suivantes :
1. sur $\mathbb{R}^2$ $q(x,y,z) = x^2 + 3z^2 - xy - yz + zx$
2. sur $\mathbb{C}^3$ $q(x,y,z) = 2x\overline{x} + ix\overline{y} - i\overline{x}y + 2y\overline{y} + i\sqrt{2}x\overline{z} - i\sqrt{2}\overline{x}z$.

Quel est leur rang ? Expliciter la forme polaire associée.

Exercice 4.

Soit E un $\mathbb{R}$ e.v. muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Montrer que pour 2 sous-espace vectoriels F et G on a $(F \cap G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger$.

Exercice 5.
Appliquer la méthode de Gauss aux formes quadratiques réelles suivantes :

1. $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - 2\lambda x_2x_3 + x_3x_1 : \lambda \in \mathbb{R}.$
2. $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)$

Trouver dans chaque cas une base orthogonale pour q dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.
Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. Sur $M_2(\mathbb{R})$, $A.B = (Tr)({}^tAB)$,
2. Sur $M_2(\mathbb{R})$, $A.B = (Tr)(AB)$,
3. Sur $\mathbb{R}[x]$ $P.Q = \int_0^1 e^x P(x)Q(x)$,
4. Sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$,
5. Sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,

Exercice 7.
Démontrer les relations suivantes dans un e.v. euclidien :

1. $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4x.y$
2. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Exercice 8.
Utiliser la méthode de Gramm-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si e_1', e_2', e_3' est la nouvelle base, montrer que la matrice de passage F est triangulaire.

Exercice 9.
Pour chaque espace euclidien E muni d'un produit scalaire ϕ, appliquer la méthode de Gramm-Schmidt à la famille F à fin de produire une base orthonomée pour $\langle F \rangle$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\langle F \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, ϕ= produit scalaire canonique, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, ϕ= produit scalaire canonique, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(X)Q(X)dX$, $F = 1, X, X^2$, $v = X^3$.
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q) = \int_0^1 P(X)Q(X)dX$, $F = 1, X, X^2$, $v = X^3$.

Exercice 10.
Nous considérons l'espace de fonctions $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ de fonction continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Nous munissions cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que si m et n sont des entiers distincts alors les fonctions $\cos nx$, $\cos mx$, $\sin nx$ et $\sin mx$ sont deux-à-deux orthogonaux pour ce produit scalaire.
2. Calculer $||\cos nx||$ et $||\sin nx||$ pour tous entiers n.
3. Calculer la projection orthogonale de le fonction x sur le sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x$.

Exercice 11.

Nous considérons l'espace de fonctions $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ de fonction continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-1, 1]$. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1. Utiliser la méthode de Gramm-Schmidt à fin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}_3[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Calculer la projection orthogonale de la fonction e^x sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 12.

Soit P une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que la matrice ${}^tPP$ est symétrique.
2. Préciser, dans la base canonique $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour cette forme quadratique ?
3. Soit q la forme quadratique définie, dans la base canonique $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$, par la matrice ${}^tPP$.
   (a) Pour tout vecteur colonne X, dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, exprimer matriciellement la valeur $q(X)$.
   (b) Démontrer que q est une forme quadratique définie positive.
   (c) En déduire, en fonction de P et des vecteurs $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.