MAT244 - Année universitaire 2005-2006
Mathématiques

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1.
Est ce que les fonctions suivantes sont des formes bilinéaires ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + x_2y_2$.
2. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + x_2x_1$.
3. $\phi : R_3[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $\phi(P, Q) = P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0)$,
4. $\phi : C([0,1], \mathbb{R}) \times C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx$.

Exercice 2.
Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base B_1 et sa matrice M_2 dans la base B_2 Calculer P, la matrice de passage de B_1 vers B_2, et vérifier que $M_2 =^t PM_1P$.

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + 3y_1y_2 \quad , \quad B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P, Q) = P(2)Q(1) \quad , \quad B_1 = \{1, X, X^2\}, B_2 = \{1, (X-1), (X^2 - 3X + 2)\}.$$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx \quad , \quad B_1 = \{1, X, X^2\}, B_2 = \{1, (X-1), X^2 - X\}.$$

Exercice 3. Soient φ et ψ deux formes linéaires définies sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Démontrer que l'application $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u, v) := \varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u)$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Démontrer que l'application $\Psi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u, v) := \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
3. Supposons que $E = \mathbb{R}^3$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = {}^t y_1 x$, $\psi(x) = {}^t y_2 x$, où (y_1, y_2) sont deux vecteurs colonne de $\mathbb{R}^3$ donnés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner les matrices de Φ et Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

1. Soit Ψ une forme bilinéaire définie sur $E \times E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit A une matrice représentant Ψ dans une base $\mathcal{B}$ fixée. Montrer que l'application
$$\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$$
définie par $\Psi(u, v) = \Phi(v, u)$ est une forme bilinéaire et préciser, en fonction de A, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.
2. Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
3. Montrer que toute forme bilinéaire $\Delta : E \times E \to \mathbb{R}$ se décompose en la somme de deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, que l'on précisera.

Exercice 5.
Pour chaque forme bilinéaire ϕ ci-dessous, montrer que ϕ est symétrique, calculer $\mathrm{Ker}(\phi)$ et donner le rang de ϕ. Calculer l'orthogonal par rapport à ϕ de la sous-partie S.

1. $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$, $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}$.
2. $\phi : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $S = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6. Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension n et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

1. Démontrer que l'ensemble $F^\perp$ des vecteurs y de E ϕ-orthogonaux à tous les vecteurs x de F constitue un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que, si ϕ est non-dégénérée, alors on a $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$. Donner un exemple où F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.
3. Démontrer que, si la restriction de ϕ à $F \times F$ est non-dégénérée, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 7. Démontrer que, pour toute forme bilinéaire symétrique ϕ sur un espace vectoriel E, pour tous sous-espaces vectoriels W, U, nous avons les propriétés suivantes.

1. $(U + W)^\perp = (U^\perp) \cap (W^\perp)$.
2. $(U \cap W)^\perp \supset U^\perp + W^\perp$.

Donner un exemple d'une forme bilinéaire de rang 1 sur $\mathbb{R}^2$ et des sous-espaces $U, W \subset \mathbb{R}^2$ tels que
$$(U \cap W)^\perp \neq U^\perp + W^\perp.$$

Exercice 8. Soient A et B des matrices $n \times n$. Montrer que, si pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^n$ nous avons que ${}^tXAY = {}^tXBY$ alors $A = B$.

Exercice 9. Appliquer la réduction de Gauss aux formes quadratiques suivantes afin de les écrire comme combinaisons linéaires de carrés de formes linéaires indépendantes.

1. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x^2 + xy + 3y^2$,

2. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = xy$,
3. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 - 2y^2 + xz + yx$,
4. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = xy - yx$,
5. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 + 2xy + y^2 + yz$,
6. $q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $q(P) = P(1)P(2) + P(1)P(0)$.

En déduire leur signature, leur rang, et donner dans chaque cas une base q-orthogonale (orthonormale lorsque cela est possible). Pour les formes 1, 2 et 3, calculer la forme bilinéaire quadratique associée à q.

Exercice 10. Vérifier que si Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ sur $E \times E$, E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors on a la relation

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)).$$

En déduire que si, pour $(u, v) \in E^2$, $Q(u) = Q(v)$, alors $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire ϕ.

Exercice 11. Soit Q une forme quadratique non-dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q(e_1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $e_2 \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $Q(e_2) = 0$ et tel que $\{e_1, e_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il existe une base v_1, v_2 de $\mathbb{R}^2$ telle que l'on a $Q(x_1v_1 + x_2v_2) = 2x_1x_2$. Quelle est la forme bilinéaire symétrique associée ? Donner sa matrice par rapport à la base v_1, v_2.
3. Montrer que la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = x^2 - y^2$ satisfait les hypothèses de l'énoncé et s'en servir pour illustrer les constructions précédentes.

Exercice 12. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0$.
- (ii) $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour la forme bilinéaire donnée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14. Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2.

1. Soit ϕ la forme bilinéaire définie, pour tout $(A, B) \in V \times V$, par $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de V. Démontrer qu'elle est symétrique définie positive, donner sa signature, son rang et une base ϕ-orthonormale.

2. Soit D la forme quadratique définie, pour tout $A \in V$, par $D(A) = \mathrm{Det}(A)$. Calculer la forme bilinéaire symétrique associée à D. Donner son rang, sa signature et les éléments isotropes de D. Préciser l'orthogonal pour D de l'espace vectoriel des matrices de trace nulle.

Exercice 15. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$.

1. Démontrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de q.