MAT244 - Année universitaire 2005-2006
Mathématiques

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1.
Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la famille F d'éléments de V est une base de V.

$$(1) V = \mathbb{R}^3, F = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \} \quad (2) V = \mathbb{R}^3 \; F = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

$$(3) V \subset \mathbb{R}^3, V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}, \quad F = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

$$(4) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 + 2X - 4\}.$$

$$(5) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}.$$

Lorsque F est bien une base, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (pour 1,2 et 3) ou du polynôme $a + bX + cX^2$ (pour 4 et 5) par rapport à F.

Exercice 2. Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la partie $S \subset V$ est un sous-espace vectoriel.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 1\}$
3. $V = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, $S = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) | f'' + f' = 0\}$
4. $V = \mathbb{R}_3[X]$, $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | (P(3))^2 = P(2).\}$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il a) aucune solution ?
b) une solution unique ?
c) une infinité de solutions ?

Exercice 4. Calculer le noyau et l'image de chaque matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. . Pour chaque application, indiquer si oui ou non elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image.

1. La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par projection sur l'axe des x.
2. La fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ z+1 \end{pmatrix}$.
3. La fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ x+z \end{pmatrix}$.
4. La fonction de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ donnée par rotation d'un angle θ autour de l'origine.
5. Une symétrie dans le plan par rapport à une droite. (Traiter séparément le cas où la droite passe par l'origine).
6. La fonction ϕ qui envoie $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ sur lui-même donnée par
$$\phi(f) = f'.$$
Nous rappelons que $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est l'espace de fonctions sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables à tous ordres.
7. La fonction $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ donnée par $\phi(P) = P' - XP$.

Exercice 6. Montrer que les trois fonctions suivantes forment une famille liée dans l'espace $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \cos(x-1) \quad , \quad x \mapsto \cos x \quad , \quad x \mapsto \cos(x+1).$$

Exercice 7. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des fonctions polynômes de degré au plus 3.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Prouver que ce dernier est de dimension 3 en en précisant une base.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes de degré égal à 2 ?

Exercice 8.

1. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2\theta = 0$. Montrer que l'ensemble des fonctions du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

2. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$. Est-ce que l'ensemble des fonctions du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$?

Exercice 9.

Nous considérons $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? En préciser une base.

Exercice 10.

Soient $P_0, \ldots, P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) des polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $0 \leq i \leq n$, le degré de P_i est i. Démontrer que la famille $(P_i)_{i=0\ldots n}$ forme une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 11.

On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Un polynôme P de $\mathcal{P}$ sera noté $P(X) = a + bX + cX^2$. Nous admettrons que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$? En donner une base.
2. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ suivants :
   (a) $E_0 = \{P \in \mathcal{P} / P(0) = 3\}$,
   (b) $E_1 = \{P \in \mathcal{P} /$ P n'a pas de racine réelle$\}$ et
   (c) $E_2 = \{P \in \mathcal{P} / a = 0\}$.

   Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$? Pour ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, en donner une base.
3. De même, on considère les applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f_0(P) = P(3)$,
   (b) $f_1(P) = d$ ($d \in \mathbb{R}$),
   (c) $f_2(P) = P'(1)$,
   (d) Si $P(X) = a_P + b_P X + c_P X^2$, on pose $f_3(P) = a_P \cdot a + b_P \cdot b + c_P \cdot c$ ($(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$),
   (e) $f_5(P) = (a_P + b_P + c_P)^2$.

   Lesquelles sont des applications linéaires ?