Bull. Sc. math., 2e série,
114, 1990, p. 115-122.

LA COHOMOLOGIE COEFFECTIVE D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

PAR

THIERRY BOUCHE (*)

[Institut Fourier, Grenoble]

RÉSUMÉ. — Nous définissons un sous-complexe différentiel du complexe de De Rham dont nous étudions la cohomologie. Des résultats locaux sont donnés : ellipticité, acyclicité (si la dimension de la variété est prise pour degré zéro); ainsi que des résultats globaux.

ABSTRACT. — We define a differential sub-complex of De Rham's complex. Local results such as ellipticity or acyclicity are given. Further global results too.

Introduction

Soit X une variété différentielle de dimension $2n$. Cette variété est dite symplectique si elle admet une 2-forme alternée non dégénérée de classe $\mathscr{C}^\infty$ fermée; nous noterons σ une telle forme. Soit Ω^q le faisceau des germes de q-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ sur X, pour tout entier q, $0 \leqslant q \leqslant 2n$. Nous définissons alors, sur tout ouvert U de X, les faisceaux $\mathscr{A}^q$ des germes de q-formes coeffectives de la façon suivante :

$$\mathscr{A}^q(U) = \{u \in \Omega^q(U);\ \sigma \wedge u = 0\}.$$

Du fait que la forme σ est fermée, la suite de faisceaux

$$\ldots \to \mathscr{A}^q \xrightarrow{d} \mathscr{A}^{q+1} \to \ldots$$

(*) Texte présenté par Jean-Pierre DEMAILLY, reçu en janvier 1989.

Thierry BOUCHE, Institut Fourier, Mathématiques, B.P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES — 0007-4497/90/02/115 8/$ 2.80

est un sous-complexe du complexe de De Rham de la variété X. Notre principal résultat est un analogue du lemme de Poincaré pour ce complexe : sa cohomologie, que nous appellerons cohomologie coeffective locale de X, est nulle en degré différent de n. Par ailleurs, nous donnons une estimation du groupe non nul $H^n(\mathscr{A}^\bullet)$, et démontrons l'ellipticité de ce complexe en degré $\geqslant n+1$. Nous étudions enfin les rapports de cette cohomologie avec la cohomologie de De Rham, plus spécialement si X est une variété kählérienne.

C'est Jean-Pierre DEMAILLY qui m'a proposé d'étudier ces quesitons. Il m'a ensuite aidé à progresser par de nombreuses discussions. Qu'il en soit ici remercié.

I. Les groupes $H^q(\mathscr{A}^\bullet)$

1. PRÉLIMINAIRES

Soit x^0 un point de X. Il existe un voisinage ouvert contractile U de x^0, muni de coordonnées locales centrées en x^0, $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ de sorte que σ s'écrive :

$$\sigma=\sum_{j=1}^n dx_j \wedge d\xi_j; \quad \text{voir par exemple [h].}$$

On appelle ces coordonnées des coordonnées symplectiques.

En posant $\zeta_j=x_j+i\xi_j$ (où $i=\sqrt{-1}$), on voit que U est isomorphe à un ouvert de $\mathbf{C}^n$, muni de la forme kählérienne canonique

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^n d\zeta_j \wedge d\bar{\zeta}_j \simeq \sigma.$$

Nous définissons L, l'opérateur de multiplication extérieure par σ, Λ son adjoint dans la métrique kählérienne définie par ω.

La formule de Lepage (décomposition en formes effectives ou primitives, cf. [W]) au-dessus de U :

$$\Lambda^q T^* X=\oplus_{r \geqslant (q-n)_+} L^r(\ker \Lambda \cap \Lambda^{q-2r} T^* X),$$

donne par dualité :

$$\Lambda^q T^* X=\oplus_{r \geqslant (n-q)_+} \Lambda^r(\ker L \cap \Lambda^{q+2r} T^* X). \tag{1}$$

En outre, Λ étant injective en degré $\geqslant n+1$, et surjective en degré $\leqslant n+1$, L est surjective en degré $\geqslant n-1$, bijective en degré $n-1$, injective en degré $\leqslant n-1$. La formule (1) permet de calculer le rang du fibré vectoriel $\ker L \cap \Lambda^q T^* X$ au-dessus de U. En effet,

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^q T^* X = (\ker L \cap \Lambda^q T^* X) \oplus \Lambda (\Lambda^{q+2} T^* X) \qquad \text{si} \quad q \geqslant n,$$

donc

$$\operatorname{rang}(\ker L \cap \Lambda^q T^* X) = \begin{cases} C_{2n}^q - C_{2n}^{q+2} & \text{si} \quad q \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad q \leqslant n-1. \end{cases}$$

Comme $\mathscr{A}^q(U) = \mathscr{C}^\infty(\ker L \cap \Lambda^q T^* X)(U)$, c'est un faisceau de $\mathscr{C}^\infty(X)$-modules libres de rang $(C_{2n}^q - C_{2n}^{q+2})$ si $q \geqslant n$, nul sinon.

2. Le cas $q \neq n$.

Théorème 1. — *$H^q(\mathscr{A}^\bullet) = 0$ si $q \neq n$.*

Démonstration

- *Le cas $q \leqslant n-1$* est trivial vu la nullité du faisceau $\mathscr{A}^q$.

- *Le cas $q \geqslant n+1$.* Soit v, un cocycle de $\mathscr{A}^q(U)$. Comme q est différent de zéro, et U est supposé contractile, le lemme de Poincaré nous assure qu'il existe une $(q-1)$-forme w' de $\Omega^{q-1}(U)$ vérifiant :

$$dw' = v.$$

De plus, $d(L w') = L\, dw' = L\, v = 0$ (car $d\sigma = 0$), donc, par le même argument,

$$\exists\, w'' \in \Omega^q(U); \qquad L\, w' = dw''.$$

Comme L est surjective en degré $\geqslant n-1$ et comme $q-2 \geqslant n-1$, il existe $w''' \in \Omega^{q-2}(U)$ telle que $w'' = L\, w'''$.

Considérons maintenant $w = w' - dw'''$. D'une part,

$$dw = dw' = v.$$

D'autre part,

$$L\, w = L\, w' - L\, dw = L\, w' - dw'' = 0. \; \blacksquare$$

3. LE CAS $q=n$.

THÉORÈME 2. — $H^n(\mathscr{A}^\bullet) \simeq dL^{-1}d(\mathscr{A}^n)$.

Démonstration. – Par définition, on a :

$$\Gamma(H^n(\mathscr{A}^\bullet), U) \simeq \{v \in \mathscr{A}^n(U);\ dv=0\}.$$

La construction du paragraphe 2 donne de même :

$$\text{(i)} \qquad \exists\, w' \in \Omega^{n-1}(U); \qquad v=dw'$$

$$\text{(ii)} \qquad \exists\, w'' \in \Omega^{n}(U); \qquad Lw'=dw''.$$

Or L est bijective en degré $n-1$, donc

$$\text{(ii)} \quad \Leftrightarrow \quad w'=L^{-1}dw' \quad \Leftrightarrow \quad v=dL^{-1}dw''.$$

Ceci prouve que $H^n(\mathscr{A}^\bullet) \subset dL^{-1}d\Omega^n(U)$, mais l'inclusion inverse est évidente car, si $u \in \Omega^n(U)$, on a :

$$d(dL^{-1}du)=0 \qquad \text{et} \qquad LdL^{-1}du=dLL^{-1}du=d^2u=0.$$

Pour obtenir le théorème 2, comme $L(\Omega^{n-2}(U)) \subset \ker dL^{-1}d$, il suffit de vérifier le

LEMME 1. — $\Omega^n(U) \simeq \mathscr{A}^n(U) \oplus L(\Omega^{n-2}(U))$.

En effet, si $v \in \Omega^{n-2}(U)$, $dL^{-1}dLv=dL^{-1}dv=d^2v=0$.

Preuve du lemme. – Soit $w \in \Omega^n(U)$. En tout point x de U, w_x admet la décomposition de Lepage suivante :

$$w_x=w_{0\,x}+\textstyle\sum_{r\geqslant 1}\Lambda^r w_{rx} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} Lw_r=0, & 0 \leqslant r \leqslant [n/2] \\ \text{et} \quad \deg w_r=n+2r. \end{cases}$$

D'autre part, on a, d'après [W], les relations de commutations classiques :

$$\text{(iii)} \qquad [L, \Lambda^r]u=r(q-r-n+1)\Lambda^{r-1}u \quad \text{pour tout } u \in \Omega^q(U),$$

donc

$$L\left(\textstyle\sum_{r=1}^{[n/2]}\Lambda^{r+1}\dfrac{1}{r(r+1)}v_r\right)=\textstyle\sum_{r=1}^{[n/2]}\dfrac{(r+1)(n+2r-r-1-n+1)}{r(r+1)}\Lambda^r w_r$$
$$=w-w_0,$$

ce qui prouve que $w-w_0 \in \operatorname{Im} L$. Enfin, le fait que la somme soit directe provient de l'unicité de la décomposition de Lepage. ■

Remarque. – Si la variété X est kählérienne, l'opérateur $dL^{-1}d$ a une écriture qui nous semble plus familière, et permet de mieux le saisir : si $w \in \mathscr{A}^n(U)$, $dw \in \mathscr{A}^{n+1}(U)$ et, par (iii) :

$$L\Lambda\, dw = [L, \Lambda]\, dw = dw,$$

donc

$$dL^{-1}\, dw = dL^{-1}\, L\Lambda\, dw = d\Lambda\, dw = d[\Lambda, d]\, w = -d(d^c)^*\, w,$$

où d^{c*} est l'adjoint de l'opérateur $d^c = i(d'' - d')$. La dernière relation de commutation est également démontrée dans [W]. Il est à noter que $(d^c)^*$ n'est autre que l'opérateur δ introduit par J.-L. Koszul sur une variété symplectique quelconque, et qui permet de définir l'homologie, dite canonique, d'une telle variété, étudiée récemment par J.-L. Brylinski [B] : $\ldots \to \Omega^q(X) \overset{\delta}{\to} \Omega^{q-1}(X) \to \ldots$ Il semble donc qu'il y ait un lien assez étroit dans l'étude de ces deux complexes.

II. Ellipticité du complexe $d : \mathscr{A}^\bullet$

Le symbole de l'opérateur différentiel d est l'application qui, à tout élément ζ du fibré cotangent à X, associe l'opérateur produit extérieur par ζ sur le faisceau considéré. Par conséquent, le complexe $d : \mathscr{A}^\bullet$ est elliptique en degré q si le complexe :

$$\ldots \to \mathscr{A}^{q-1} \overset{\zeta\,\wedge\cdot}{\to} \mathscr{A}^q \overset{\zeta\,\wedge\cdot}{\to} \mathscr{A}^{q+1} \to \ldots$$

est *exact* en degré q pour tout ζ non nul.

Ce problème étant purement ponctuel, plaçons-nous en un point x_0 de X. Soit $\zeta \in T^*_{x_0}X \setminus \{0\}$. Il est possible de choisir un repère symplectique de X au voisinage de x_0 tel que $dx_1 = \zeta$, et $\sigma = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge d\xi_j$. La question est alors réduite à savoir si le complexe :

$$\ker L \cap \Lambda^{q-1}\, T^*_{x_0} X \xrightarrow{dx_1\,\wedge\cdot} \ker L \cap \Lambda^q\, T^*_{x_0} \xrightarrow{dx_1\,\wedge\cdot} \ker L \cap \Lambda^{q+1}\, T^*_{x_0} X$$

est exact en degré q.

LEMME 2. — *Le complexe $d : \mathscr{A}^{\bullet}$ est elliptique en degré $\geqslant n+1$.*

Démonstration. — Soit $u \in \Lambda^q T^*_{x_0} X$ vérifiant :

$$\text{(i)} \qquad \sigma \wedge u = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad dx_1 \wedge u = 0$$

$$\text{(iii)} \qquad u \neq 0.$$

Il s'agit de montrer qu'il existe $v \in \Lambda^{q-1} T^*_{x_0} X$ vérifiant $\sigma \wedge v = 0$ et $u = dx_1 \wedge v$.

Notons $\sigma' = \sum_{j=2}^{n} dx_j \wedge d\xi_j$. Alors, (ii) entraîne qu'il existe $v_1 \in \Lambda^{q-1} T^*_{x_0} X$ tel que $dx_1 \wedge v_1 = u$, où v_1 ne contient pas dx_1, et (i) implique

$$\sigma \wedge dx_1 \wedge v_1 = \sigma' \wedge dx_1 \wedge v_1 = 0;$$

c'est-à-dire $\sigma' \wedge v_1 = 0$.

Deux cas se présentent :

- si $d\xi_1 \wedge v = 0$, alors $\sigma' \wedge v_1 = 0$, donc le problème est résolu;
- si $d\xi_1 \wedge v \neq 0$, on a une décomposition : $v_1 = v_2 + d\xi_1 \wedge v_3$, où v_2 et v_3 ne contiennent ni dx_1 ni $d\xi_1$ dans leurs expressions en coordonnées. On peut considérer v_2 comme un $(q-1)$-covecteur sur une varité X de dimension $(2n-2)$, munie de la forme symplectique σ' (au voisinage de x_0, X est isomorphe à $T^* \mathbf{R}^n$, X' à $T^* \mathbf{R}^{n-1}$ où $\mathbf{R}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = 0\}$). Or, l'opérateur associé L' est surjectif sur le degré $(q-1)$, si $(q-1) \geqslant (2n-2)/2+1$, *i.e.* $q \geqslant n+1$ (*cf.* I; § 1). Donc il existe un élément v_4 de $\Lambda^{q-3} T^*_{x_0} X$ tel que $v_2 = \sigma' \wedge v_4$.

Considérons maintenant $v = v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge v_4$. Il vérifie :

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} \sigma \wedge v &= \sigma \wedge v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \sigma \wedge v_4 \\ &= dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \sigma' \wedge v_4 \\ &= dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge (v_1 - v_2) \\ &= 0 \quad \text{car } v_1 - v_2 = d\xi_1 \wedge v_3. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \qquad dx_1 \wedge v = dx_1 \wedge v_1 = u. \blacksquare$$

Nous avons pour conséquence le

THÉORÈME 3. — *Soit X une variété symplectique compacte de dimension $2n$. Alors les groupes de cohomologie $H^q(\mathscr{A}^{\bullet}(X))$ sont de dimension finie pour tout $q \geqslant n+1$. (Rappelons qu'ils sont nuls pour tous les $q \leqslant n-1$.)*

III. Rapports avec la cohomologie de De Rham

Une question se pose naturellement : *Sur une variété compacte symplectique X, les groupes $H^q(\mathscr{A}^{\bullet}(X))$ sont-ils formés des classes de la cohomologie de De Rham annulées par σ?* Nous allons montrer que la réponse est **oui** sur une variété kählérienne pour $q \geqslant n+1$.

Le groupe $H^n(\mathscr{A}^{\bullet}(X))$ contient toutes les formes $dL^{-1}du$, où u est une n-forme $\mathscr{C}^{\infty}$ sur X. Ces formes sont toutes dans la classe nulle de $H^n(X, \mathbf{C})$, mais sont dans autant de classes distinctes de $H^n(\mathscr{A}^{\bullet}(X))$ qu'il y a de sections différentes de $dL^{-1}d(\Omega^n(X))$.

Notons en général $H_{\sigma}^{\bullet}(X)$ le sous-groupe des classes de De Rham sur la variété X annulées par L. On a un morphisme :

$$\mathrm{H}^{\bullet}(\mathscr{A}(X)) \to H_{\sigma}^{\bullet}(X)$$

qui est surjectif en degré $\geqslant n+1$. La question est de savoir s'il est injectif.

• Soit ω une métrique kählérienne sur X, et $\mathscr{H}_{\omega}^{\bullet}(X)$ l'espace des formes harmoniques sur X, annulées par L.

On peut remarquer que $H_{\omega}^q(X)$ et $\mathscr{H}_{\omega}^q(X)$ sont isomorphes. En effet, l'élément $h \in \mathscr{H}^q(X)$ qui représente une classe $\mathbf{a}$ de $H_{\omega}^q(X)$ admet pour image par L la $(q+2)$-forme harmonique qui représente l'image par L de $\mathbf{a}$, soit $\mathbf{0}$.

Maintenant, soit $q \geqslant n+1$ et $u \in \mathscr{A}^q(X)$ telle que $[u]_{DR} = \mathbf{0}$, *i.e.* :

$$Lu=0 \qquad \text{et} \qquad \exists\, v \in \Omega^{q-1}(X); \qquad u=dv.$$

Alors, $d(Lv)=0$, donc Lv admet la représentation par une forme harmonique h unique et une q-forme x : $Lv=h+dx$. Or, L est surjective sur les degrés $\geqslant n+1$; on peut donc trouver y vérifiant $x=Ly$, et une $(q-1)$-forme g telle que $Lg=h$. Le fait est que l'on peut choisir g harmonique. En effet, considérons la décomposition de Lepage de g :

$$g=\sum\nolimits_{r \geqslant (n-q+1)_+} \Lambda^r g_r \qquad \text{où} \quad Lg_r=0 \quad \text{pour tout } r,$$

alors

$$Lg=\sum\nolimits_{r \geqslant (n-q+1)_+} L\Lambda^r g_r;$$

soit

$$h= Lg=\sum\nolimits_{r \geqslant (n-q+1)_+} \Lambda^r[(r+1)(q+r+1-n)g_{r+1}]$$

et $\Delta h=0 \Leftrightarrow \Delta g_r=0$ pour tout $r \geqslant (n-q+1)_+ + 1$, donc $g-g_0$ est harmonique, et $L(g-g_0)=Lg=h$.

Par conséquent, $Lv=L(g+dy)$, d'où : $\exists z \in \mathscr{A}^{q-1}(X)$: $v=g+z+dy$. On a alors

$$u=d(g+z+dy)=dz$$

et

$$Lz=0.$$

Donc la classe de u dans $H^q(\mathscr{A}(X))$ est également nulle.

Ceci démontre la

PROPOSITION 3.1. — *Soit X, une variété kählérienne compacte, alors, on a les isomorphismes :* $H^q_\omega(X) \simeq \mathscr{H}^q_\omega(X) \simeq H^q(\mathscr{A}^\bullet(X))$ *pour tout* $q=0, 1, \ldots, 2n, q \neq n$.

• A l'heure actuelle, nous ne savons pas démontrer la proposition 3.1 pour une variété symplectique quelconque. Nous n'avons pas non plus trouvé de contre-exemple simple sur la variété d'Iwasawa, ou les variétés d'Iwasawa généralisées données dans [C-F-G]. Nous restons cependant pessimiste, car la preuve actuelle requiert un lemme dont nous doutons qu'il soit vrai, que nous formulerons comme

PROBLÈME 3.2. — *Est-il vrai qu'une forme fermée de degré q supérieur à* $n+1$ *sur une variété symplectique de dimension* $2n$ *est l'image par L d'une* $(q-2)$*-forme fermée ?*

BIBLIOGRAPHIE

[B] BRYLINSKI (J. L.). — A differential complex for Poisson Manifolds, *J. diff. Geom.*, t. 28, 1988, p. 93-114.

[C-F-G] CORDERO (L. A.), FERNANDEZ (M.) et GRAY (A.). — Variétés symplectiques sans structures kählériennes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 301, série I, 1985, p. 217-218.

[H] HÖRMANDER (L.). — *The analysis of linear partial differential operators*, tome III, chap. XXI, *Symplectic geometry*, Berlin, Springer, 1985 (*Grundlehren...*, 274).

[W] WEIL (A.). — *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1267; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 6).