

# Mat 404 :

## Algèbre bilinéaire, séries de Fourier

Thierry Bouche

Université Grenoble Alpes

2nd semestre 2023-2024

# *MAT 404 : Présentation*

- 1 Objectif : Les séries de Fourier
- 2 Contenu du cours
- 3 Organisation
- 4 Évaluation



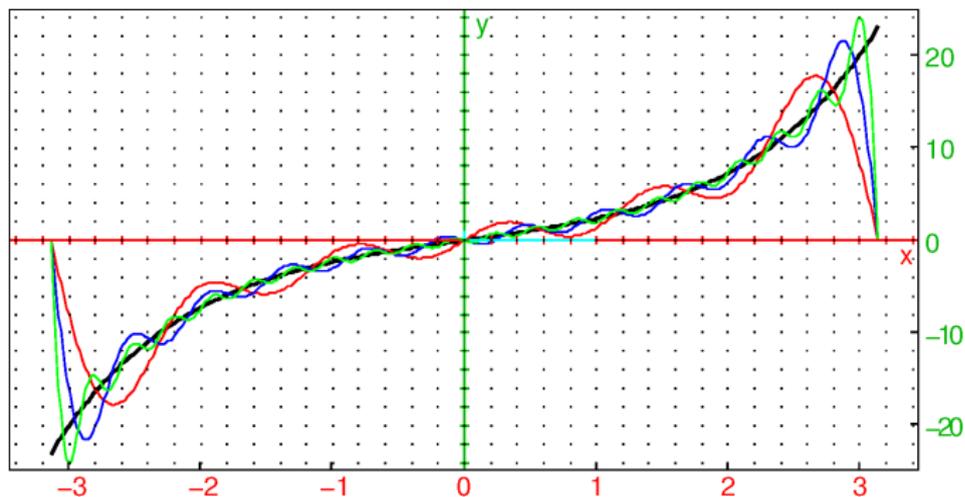
## Objectif

- Les séries de Fourier permettent d'approcher une fonction  $f$  sur un intervalle par des sommes de fonctions sinus ou cosinus élémentaires.
- Par exemple ci-dessous  $f(x) = \exp(x)$  (sur  $[0, \pi]$ , impaire) en noir est approchée de plus en plus précisément par une somme de 5, 10 ou 20 sinus.



## Objectif

- Les séries de Fourier permettent d'approcher une fonction  $f$  sur un intervalle par des sommes de fonctions sinus ou cosinus élémentaires.
- Par exemple ci-dessous  $f(x) = \exp(x)$  (sur  $[0, \pi]$ , impaire) en noir est approchée de plus en plus précisément par une somme de 5, 10 ou 20 sinus.



- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.



- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.



- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.

## Contenu du cours

Pour appréhender cela, on va passer en revue les théories utilisées :

- algèbre linéaire  
(dans des espaces vectoriels de dimension pouvant être infinie)
- algèbre bilinéaire et formes quadratiques  
(en particulier : produits scalaires, projections orthogonales)
- analyse des séries  
(convergence de la somme d'une infinité de termes)

*Applications* : décomposition du son en harmoniques, résolution de l'équation de la chaleur, théorie du signal...

## Contenu du cours

Pour appréhender cela, on va passer en revue les théories utilisées :

- algèbre linéaire  
(dans des espaces vectoriels de dimension pouvant être infinie)
- algèbre bilinéaire et formes quadratiques  
(en particulier : produits scalaires, projections orthogonales)
- analyse des séries  
(convergence de la somme d'une infinité de termes)

**Applications** : décomposition du son en harmoniques, résolution de l'équation de la chaleur, théorie du signal...

## Organisation

- 14 séances de cours de 1 h 30.  
Il y a 2 créneaux de cours par semaine (26 en tout!), cela permettra d'avoir deux cours certaines semaines, et de faire des CC communs. En général, le cours aura lieu le **lundi**.
- 2 séances de TD par semaine (23 séances en tout).
- **Les prochains cours auront lieu les 19/01, 26/01, 29/01**  
Le cours du 22/01 n'aura pas lieu. L'ampli sera utilisé pour un TD du groupe PR/PCM-I/S&D en remplacement du TD du mardi 23
- Le poly du cours, les feuilles d'exo, quelques annales :  
[http://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~bouche/ens/L2\\_MAT404/](http://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~bouche/ens/L2_MAT404/)
- Site chamilo :  
<https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX4MT44/>

# Évaluation

- CC1 : partiel semaine du 11 mars
- CC2 : moyenne de 2 DS
  - DS1 : semaine du 12/02
  - DS2 : semaine du 15/04
- ET1 : mai 2024
- ET2 : 2<sup>e</sup> chance juin 2024
- Règle du max si ET est supérieur à la moyenne des CC.

Un formulaire manuscrit recto-verso est autorisé au CC1 et aux ET.  
Les calculatrices sont autorisées.