

Mat 404 :

Algèbre bilinéaire, séries de Fourier

Thierry Bouche

Université Grenoble Alpes

2nd semestre 2023-2024

MAT 404 : Présentation

- 1 Objectif : Les séries de Fourier
- 2 Contenu du cours
- 3 Organisation
- 4 Évaluation

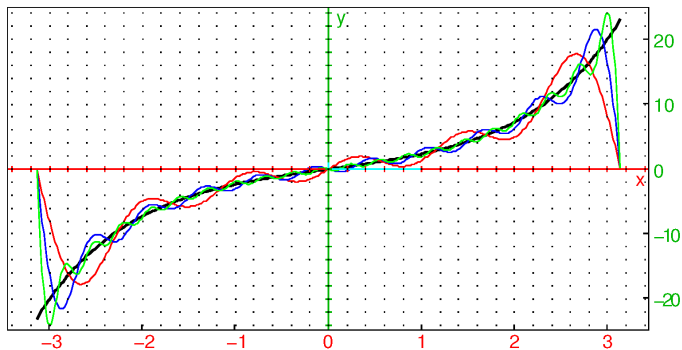
Objectif

- Les séries de Fourier permettent d'approcher une fonction f sur un intervalle par des sommes de fonctions sinus ou cosinus élémentaires.
- Par exemple ci-dessous $f(x) = \exp(x)$ (sur $[0, \pi]$, impaire) en noir est approchée de plus en plus précisément par une somme de 5, 10 ou 20 sinus.



Objectif

- Les séries de Fourier permettent d'approcher une fonction f sur un intervalle par des sommes de fonctions sinus ou cosinus élémentaires.
- Par exemple ci-dessous $f(x) = \exp(x)$ (sur $[0, \pi]$, impaire) en noir est approchée de plus en plus précisément par une somme de 5, 10 ou 20 sinus.





- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.



- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.



- Cette décomposition s'apparente à l'écriture en coordonnées de vecteurs dans des espaces vectoriels euclidiens de grande dimension.
- On se place dans un espace de fonctions (espace vectoriel de dimension infinie) et on voit les sinus et cosinus comme les éléments d'une « base orthonormée » (qui aurait une infinité de termes).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

- Il est remarquable que cette invention de Joseph Fourier vers 1820 permette non seulement d'approcher très généralement les fonctions sur un intervalle, mais aussi de résoudre des équations linéaires par superposition.

Contenu du cours

Pour appréhender cela, on va passer en revue les théories utilisées :

- algèbre linéaire
(dans des espaces vectoriels de dimension pouvant être infinie)
- algèbre bilinéaire et formes quadratiques
(en particulier : produits scalaires, projections orthogonales)
- analyse des séries
(convergence de la somme d'une infinité de termes)

Applications : décomposition du son en harmoniques, résolution de l'équation de la chaleur, théorie du signal...

Contenu du cours

Pour appréhender cela, on va passer en revue les théories utilisées :

- algèbre linéaire
(dans des espaces vectoriels de dimension pouvant être infinie)
- algèbre bilinéaire et formes quadratiques
(en particulier : produits scalaires, projections orthogonales)
- analyse des séries
(convergence de la somme d'une infinité de termes)

Applications : décomposition du son en harmoniques, résolution de l'équation de la chaleur, théorie du signal...

Organisation

- 14 séances de cours de 1 h 30.
Il y a 2 créneaux de cours par semaine (26 en tout!), cela permettra d'avoir deux cours certaines semaines, et de faire des CC communs. En général, le cours aura lieu le **lundi**.
- 2 séances de TD par semaine (23 séances en tout).
- **Les prochains cours auront lieu les 19/01, 26/01, 29/01**
Le cours du 22/01 n'aura pas lieu. L'ampli sera utilisé pour un TD du groupe PR/PCM-I/S&D en remplacement du TD du mardi 23
- Le poly du cours, les feuilles d'exo, quelques annales :
http://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~bouche/ens/L2_MAT404/
- Site chamilo :
<https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX4MT44/>

Évaluation

- CC1 : partiel semaine du 11 mars
- CC2 : moyenne de 2 DS
 - DS1 : semaine du 12/02
 - DS2 : semaine du 15/04
- ET1 : mai 2024
- ET2 : 2^e chance juin 2024
- Règle du max si ET est supérieur à la moyenne des CC.

Un formulaire manuscrit recto-verso est autorisé au CC1 et aux ET.
Les calculatrices sont autorisées.