

**Exercice 1.**  $\diamond$  Donner les coefficients de Fourier trigonométriques des fonctions suivantes, définies sur  $[-\pi, \pi]$  :

1.  $f(x) = \cos(2x)$ ,
2.  $f(x) = 3 + 2 \cos(3x) + 4 \sin(5x)$ ,
3.  $f(x) = \cos^2(x)$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.

1. Montrer que si  $f$  est paire alors sa série de Fourier est une série de cosinus.
2. Montrer que si  $f$  est impaire alors sa série de Fourier est une série de sinus.

**Exercice 3.**  $\diamond$

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = x^2$ .
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ ,  $c_k$ . Vérifier qu'on a bien

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

3. En déduire, en utilisant le théorème de Parseval, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Exercice 4.**  $\diamond$

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = |x|$ .
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ ,  $c_k$ . Vérifier qu'on a bien

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

3. En déduire les valeurs de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

4. Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice 5.** Soit de la fonction  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = |\sin(x)|$ . Calculer le développement en série de Fourier de  $f$ .

**Exercice 6.**  $\diamond$  Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et de la fonction  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = \cos(ax)$ . Calculer le développement en série de Fourier de  $f$  et montrer que

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

**Exercice 7.**  $\diamond$  Déterminer le développement en série de sinus de la fonction

$$f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

**Exercice 8.** Déterminer le développement en série de cosinus de la fonction

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Exercice 9.**  $\diamond$  On considère la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x$  pour  $x \in [-\pi, \pi[$ . Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ , et étudier la convergence de la série de Fourier  $S(f)(x)$  pour  $x \in [-\pi, \pi]$  en utilisant le théorème de Dirichlet (on pourra traiter séparément les cas  $x = \pm\pi$ ).

**Exercice 10.** On considère la fonction 1-périodique définie par  $f(x) = x$  pour  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . Calculer la série de Fourier  $S(f)(x)$  et étudier sa convergence (on pourra soit calculer les coefficients de Fourier directement en utilisant les formules du cours pour les fonctions 1-périodiques, soit faire un changement de variables dans la série de Fourier de l'exercice précédent).

**Exercice 11.** (Juin 2019) Dans cet exercice, on admettra que pour  $n$  entier non nul, on a :

$$(*) \quad \int_0^\pi x^3 \sin(nx) \, dx = -\pi(n^2\pi^2 - 6) \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Soit  $S(f)$  la série de Fourier de la fonction définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(t) = t^3$ .

1. Calculer les coefficients de Fourier de  $f$
2. Montrer que  $S(f)(t) = f(t)$  pour  $t \in ]-\pi, \pi[$  en appliquant le théorème de Dirichlet (on justifiera que les hypothèses sont vérifiées).
3. La formule pour  $S(f)(t)$  de la question précédente est-elle valable pour  $t = \pi$ ? Sinon, que vaut  $S(f)(\pi)$ ?
4. Déterminer la valeur de la série de Fourier au point  $t = \pi/2$ . En déduire une série convergente dont la somme vaut  $\pi^3/8$ .
5. Montrer que l'identité de Parseval s'applique. En déduire une formule pour :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 - 6)^2}{n^6}.$$

6. Les séries suivantes sont-elles convergentes :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$  ?

7. Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ , sachant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

8. Montrer la formule (\*) à l'aide d'une intégration par parties.