Exercice 1.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ différent de 1. Démontrer par récurrence sur k la formule : $1+\lambda+\ldots+\lambda^k = \dfrac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

Exercice 2. $\diamond$ Déterminer si la série de terme u_n converge ou non dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}, n \geq 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^{-1/2}}{2^n}, n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}, n \geq 1$.
4. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}, n \geq 1$.

Exercice 3. $\diamond$ Déterminer si la série de terme u_n converge ou non dans les cas suivants :

1. $u_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\dfrac{1}{n}), n \geq 1$.
2. $u_n = n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{n} - 1), n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}, n \geq 1$.
4. $u_n = \sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha}, n \geq 1$ (selon les valeurs de α).
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n} - \sin(\dfrac{1}{n})\right), n \geq 1$.
6. $u_n = \log(1+\dfrac{1}{n}) - \log(1-\dfrac{1}{n}), n \geq 1$.
7. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}, n \geq 1$.
8. $u_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)/\sqrt{n+1}, n \geq 1$.
9. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right), n \geq 1$.
10. $u_n = \left(1 - n\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)/\sqrt{n+1}, n \geq 1$.

Exercice 4.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $\sum n^\alpha \lambda^n$ ($n \geq 1$) avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

1. En utilisant une comparaison, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors cette série converge.
2. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^\alpha \lambda^{n/2}$?
3. Justifier l'existence d'une constante C telle que $n^\alpha \lambda^n \leq C\lambda^{n/2}$ pour tout n. En déduire que pour tout α et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $n^\alpha \lambda^n$ converge.
4. En déduire que pour tout polynôme P et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $\sum P(n)\lambda^n$ converge.

Exercice 5.

On considère dans cet exercice des séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}$ $(n \geq 2)$ avec α, β des nombre réels strictement positifs.

1. Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, montrer que cette série converge lorsque $\alpha > 1$.
2. On suppose maintenant $\alpha < 1$. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^{\alpha-1} \log(n)^\beta$?
3. En supposant toujours que $\alpha < 1$, démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout n $\frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \geq \frac{C}{n}$.

   En déduire que dans ce cas la série $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ diverge quelque soit β.

Exercice 6. $(*)$ Exemple de séries semi-convergentes.

On pose, pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$, $u_n = \frac{z^n}{n+1}$.

1. Pour quelles valeurs de z la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge si $|z| > 1$.
3. On s'intéresse désormais à la série $\sum u_n$ dans le cas où $|z| = 1$.
   Traiter les deux cas où z est réel.
4. On suppose maintenant que z est un complexe de module 1 différent de 1 ou -1 et on pose $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$.

   Pour $p, q \in \mathbb{N}$, avec $q \geq p$, on note $S_{p,q}(\theta) = \sum_{k=p+1}^{q} e^{ik\theta}$, avec la convention $S_{p,p}(\theta) = 0$ (c'est une somme vide).

   (a) Calculer $S_{p,q}(\theta)$ et montrer que $|S_{p,q}(\theta)| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

   (b) Vérifier la formule
   $$u_n = \frac{1}{n+1}\big(S_{p,n}(\theta) - S_{p,n-1}(\theta)\big)$$
   et montrer
   $$\sum_{n=p+1}^{q} u_n = \sum_{n=p+1}^{q-1} S_{p,n}(\theta)\Big[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big] + \frac{S_{p,q}(\theta)}{q+1} .$$
   Note : Cette formule, qui s'apparente à une intégration par parties discrète, s'appelle la sommation d'Abel.

   (c) En déduire que
   $$\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right| \leq \frac{1}{p+1}\frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} .$$

   (d) Pour montrer que la série $\sum u_n$ converge dans ce cas, soit on utilise le critère de Cauchy si on le connaît, soit on se ramène à des séries à termes positifs. Tout d'abord on sépare parties réelle et imaginaire : $u_n = a_n + ib_n$, avec $a_n = \cos(n\theta)$, $b_n = \sin(n\theta)$. On pose
   $$\begin{array}{llll} a_n^+ = \max(a_n, 0), & a_n^- = -\min(a_n, 0), & a_n = a_n^+ - a_n^-, & |a_n| = a_n^+ + a_n^-, \\ b_n^+ = \max(b_n, 0), & b_n^- = -\min(b_n, 0), & b_n = b_n^+ - b_n^-, & |b_n| = b_n^+ + b_n^-. \end{array}$$
   En utilisant la majoration de la question précédente, montrer que les séries à termes positifs $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum b_n^+$ et $\sum b_n^-$ sont toutes convergentes et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.