Exercice 1. $\diamond$ Pour chaque matrice A, donner la forme bilinéaire symétrique ϕ dont A est la matrice dans la base canonique. Trouver une base orthogonale pour ϕ. Existe-t-il une base ϕ-orthonormée ? La forme ϕ est-il un produit scalaire ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. $\diamond$ Sur $\mathbb{R}[x]$, $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^x P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\diamond$ Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.
3. $\diamond$ Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
4. (*) Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
5. (*) Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 3. Démontrer les relations suivantes dans un espace vectoriel euclidien :

1. $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4x \cdot y$.
2. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Exercice 4. $\diamond$ Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base (e_1, e_2, e_3), où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Pour chaque espace euclidien E ci-dessous muni du produit scalaire ϕ, appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille $\mathcal{F}$ afin de produire une base orthonomée pour $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$. Donner des équations définissant $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$.

1. $\diamond$ $E = \mathbb{R}^3$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\diamond$ $E = \mathbb{R}^4$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $\diamond$ $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(X)\,Q(X)dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
4. $\diamond$ $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(X)\,Q(X)dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
5. (*) $E = \mathbb{R}^3$, $\phi(x,y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. $\diamond$ Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x,y) = 4x^2 + xy + y^2$.

1. Démontrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de q.

Exercice 7. Considérons sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique q, définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + 4z^2.$$

1. Démontrer que la forme bilinéaire associée à q est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ q-orthonormale.

Exercice 8. $\diamond$ Nous considérons l'espace $\mathscr{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que si m et n sont des entiers positifs distincts alors les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$, $x \mapsto \cos(mx)$, $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \sin(mx)$ sont deux à deux orthogonales pour ce produit scalaire.
2. Calculer $\|x \mapsto \cos(nx)\|$ et $\|x \mapsto \sin(nx)\|$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto x$ sur le sous-espace de $\mathscr{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $1, \cos, \sin, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x)$.

Exercice 9. Nous considérons l'espace $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Calculer la meilleure approximation polynomiale (au sens de la distance associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$) de degré inférieur ou égal à 2 des fonctions suivantes : exp, cos et $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Exercice 10. (*) Soit P une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que la matrice ${}^tPP$ est symétrique.
2. Préciser, dans la base canonique $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour cette forme quadratique ?
3. Soit q la forme quadratique définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par la matrice ${}^tPP$.
   (a) Pour tout vecteur colonne X, dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, exprimer matriciellement la valeur $q(X)$.
   (b) Démontrer que q est une forme quadratique définie positive.
   (c) En déduire, en fonction de P et des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11. (*) Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Soit p_W la projection orthogonale sur W. Montrer que

1. $p_W(v) = v$ si et seulement si $v \in W$
2. $p_W \circ p_W = p_W$
3. $p_W(v) = 0$ si et seulement si $v \in W^\perp$.

Exercice 12. (juin 22)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs réelles muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$$

On notera $e_1 \in E$ la fonction constante égale à 1 sur $[-1,1]$, $e_2 \in E$ la fonction définie par $e_2(t) = t$, $e_3 \in E$ la fonction définie par $e_3(t) = \cos(t)$. Vous pouvez utiliser 1, t et $\cos(t)$ pour désigner e_1, e_2 et e_3 (abus de notation).

1. Vérifier que $e_1 \perp e_2$, déterminer la norme de e_1 et e_2
2. Déterminer la projection orthogonale de e_3 sur l'espace vectoriel F engendré par e_1 et e_2
3. Quelle est la distance de e_3 à F ?
4. Soit G l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Déterminer une base orthonormale de G.

Exercice 13. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver les nombres a et b tels que $y = ax + b$ soit la meilleure droite d'approximation des points :

1. $(x = 1, y = 1), (x = 2, y = 3), (x = 3, y = 2)$.
2. $(x = 1, y = 0), (x = 2, y = 5), (x = 3, y = 7)$.

Exercice 14. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver la fonction $x \mapsto g(x) = a + b\cos(x) + c\cos(2x)$ qui minimise la distance $d(g, x \mapsto x^2)$ dans l'espace $C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f_1, f_2\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(t)dt$.

Exercice 15. (*)

1. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $P = (v_1|v_2|\ldots|v_n)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les v_i. Montrer que $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit E un espace euclidien et soit B_1 une base orthonormée pour E. Soit B_2 une autre base pour E. Montrer que B_2 est orthonormée si et seulement si la matrice P de changement de la base B_1 à B_2 est une matrice orthogonale.

Exercice 16. (*) Soit f une endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(v,w) = \langle v, f(w)\rangle$ est bilinéaire.
2. Soit B une base de E. Soit M la matrice de l'application linéaire f dans la base B. Soit N la matrice de l'application bilinéaire ϕ dans la base B. Montrer que si B est une base orthonormée alors $M = N$.
3. Montrer que réciproquement si B n'est pas orthonormée alors $M \neq N$.

Exercice 17. Montrer que le produit de deux réflexions dans $\mathbb{R}^2$ est une rotation dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. $\diamond$ Pour chaque matrice symétrique 3×3, trouver une base B_1 de $\mathbb{R}^3$, composée de vecteurs propres de A_i, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. $\diamond$ Pour chaque forme quadratique q, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui est q-orthogonale et orthonormée pour les produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

1. $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
2. $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz.$

Exercice 20. (mai 22)
Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que 1 et -1 sont valeurs propres de A
2. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de ϕ
3. *Bonus* : Montrer que ϕ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on déterminera.