

Exercice 1. \diamond Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont-elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_2 + x_2 y_2.$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(P, Q) = 2P'(1)P(0) + Q'(1)Q(0).$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(P, Q) = 2P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0).$
4. $\phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1-x) dx.$

Exercice 2. \diamond Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base \mathcal{B}_1 et sa matrice M_2 dans la base \mathcal{B}_2 . Calculer P , la matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}_2 , et vérifier que $M_2 = {}^t P M_1 P$. La forme bilinéaire ϕ est-elle symétrique ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_2 + 3y_1 x_2 \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(P, Q) = P(1)Q(-1) \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2-3X+2)\}.$$

3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x) dx \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), X^2-X\}.$$

Exercice 3.

1. Soit Ψ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ où V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit A une matrice représentant Ψ dans une base \mathcal{B} fixée. Montrer que l'application

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par $\Phi(u, v) = \Psi(v, u)$ est une forme bilinéaire et préciser, en fonction de A , sa matrice dans la base \mathcal{B} . Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.

2. Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^t M)$. Démontrer que c'est l'unique façon d'écrire M comme une somme d'une matrice symétrique et une matrice anti-symétrique.
3. Montrer que toute forme bilinéaire $\Delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme de deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, que l'on précisera.

Exercice 4. (*) Pour chaque forme bilinéaire ϕ , sur l'espace vectoriel V donner son rang (sauf pour le 4) et calculer son noyau. Trouver l'orthogonal pour ϕ du sous-espace W (sauf pour le 4).

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$

2. $V = \mathbb{R}^3$, $\phi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + 2x_2y_2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\}$
4. $V = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

Exercice 5. Soient A et B des matrices $n \times n$. Montrer l'implication suivante :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, {}^tXAY = {}^tXBY \Rightarrow A = B.$$

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel, et ϕ une forme bilinéaire symétrique définie sur V .

1. Vérifier que si q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme ϕ alors on a la relation

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q_\phi(x + y) - q_\phi(x - y)).$$

2. En déduire que si $q_\phi(u) = q_\phi(v)$, alors $(u + v)$ et $(u - v)$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire ϕ .
3. Interpréter ce résultat quand $V = \mathbb{R}^3$ et ϕ est le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 7. Vérifier que si V est un espace vectoriel et q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ sur $V \times V$ alors on a les relations

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q_\phi(x + y) - q_\phi(x) - q_\phi(y))$$

et

$$q_\phi(x) + q_\phi(y) = \frac{1}{2}(q_\phi(x + y) + q_\phi(x - y)).$$

Exercice 8. \diamond Pour chaque forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 , donner la forme polaire ϕ associée et la matrice de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
2. $q(x, y, z) = 2xy + 4xz + 6yz$
3. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$
4. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz$

Exercice 9. (*) (version simplifiée de la forme de Minkowski)

Sur \mathbb{R}^2 , on considère la forme bilinéaire

$$M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, M \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1x_2 - y_1y_2.$$

1. Donner la matrice N de M dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
2. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ une matrice telle que $M(P\underline{V}, P\underline{W}) = M(\underline{V}, \underline{W})$ pour tous $\underline{V}, \underline{W}$ dans \mathbb{R}^2 . On suppose pour simplifier que $a, e > 0$.
Montrer que $M(P\underline{V}, P\underline{W}) = M(\underline{V}, \underline{W})$ pour tout $\underline{V}, \underline{W}$ si et seulement si

$$a^2 - d^2 = 1, b^2 - e^2 = -1 \text{ et } ab = de.$$

3. En déduire que $a = e$.
4. Montrer que si $\beta = \sqrt{a^2 - 1}$ alors $b = d = \pm\beta$.
5. Ecrire P en fonction de b . Que constate-t-on ? (On pourra faire une substitution $b = \sinh(\alpha)$.)

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.
- (ii) $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

Exercice 11. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une base de \mathbb{R}^2 qui est orthogonale pour la forme bilinéaire donnée par la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
2. En déduire une base orthonormée pour cette même forme.
3. Quel est le rang de A ?

Exercice 12. (*) Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 .

1. Soit ϕ la forme bilinéaire définie, pour tout $(A, B) \in V \times V$, par

$$\phi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB).$$

- (a) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de V .
 - (b) Démontrer qu'elle est symétrique et donner son rang.
 - (c) Trouver une base ϕ -orthonormale pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit D la forme quadratique définie, pour tout $A \in V$, par $D(A) = \det(A)$.
 - (a) Calculer la forme bilinéaire symétrique associée à D .
 - (b) Donner son rang et sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. (*) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la forme $\tau(A, B) = \text{Tr}(AB)$ où Tr est la trace d'une matrice.

1. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que pour toute matrice carrée $A \neq 0$ il existe B telle que $\tau(A, B) \neq 0$. (On pourra calculer $\tau({}^tAA)$).

Exercice 14. \diamond Pour chaque forme quadratique q

- Appliquer la réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
 - Déduire la signature et le rang de q . La forme bilinéaire associée à q est-elle un produit scalaire ?
 - Donner une base q -orthogonale pour \mathbb{R}^n . Lorsque cela est possible, donner une base q -orthonormée de \mathbb{R}^n .
1. $q(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$,
 2. $q(x, y) = x^2 - 5xy - y^2$,
 3. $q(x, y) = xy$,
 4. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$,

5. $q(x, y, z) = xy - yz$,
6. $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$,
7. $q(x, y, z) = a(x^2 - z^2) + 2y^2 - 2xz$ (discuter selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 15. \diamond Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique qui à un polynôme associe son discriminant :

$$\Delta: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(X) = aX^2 + bX + c \mapsto \Delta(P) = b^2 - 4ac$$

1. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à Δ .
2. Donner la matrice de la forme polaire φ dans la base $\mathcal{F}_0 = \{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire :

$$\Delta(P) = b^2 + (a - c)^2 - (a + c)^2.$$

4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1 = (\frac{1}{2}(X^2 - 1), X, \frac{1}{2}(X^2 + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice de passage de la base \mathcal{F}_0 à la base \mathcal{F}_1 .
6. Donner la matrice de la forme φ dans la base \mathcal{F}_1 .
7. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base \mathcal{F}_1 .
8. Donner le rang et la signature de φ .

Exercice 16. (CC 2020) On se place dans V l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 2]$ dans \mathbb{R} . On définit la forme $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par $\phi(f, g) = \int_0^2 f(t)g(t) dt$.

1. Comparer $\phi(f, g)$ et $\phi(g, f)$. Montrer que ϕ est bilinéaire. Est-elle symétrique? Antisymétrique?
2. Soit W le sous-espace vectoriel de V engendré par les fonctions $f_0: t \rightarrow 1$, $f_1: t \rightarrow t - 1$, $f_2: t \rightarrow (t - 1)^2$. Montrer que $B = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de W .
3. Vérifier que f_1 est ϕ -orthogonale à f_0 et f_2 .
4. Calculer la matrice M de la forme ϕ restreinte à W dans la base B .
5. Déterminer un réel c tel que f_0 soit ϕ -orthogonal à $f_2 - cf_0$. En déduire une base B' de W qui est ϕ -orthogonale.
6. Déterminer la matrice de ϕ dans la base B' .
7. Soit q la forme quadratique associée à ϕ (on a donc $q(f) = \phi(f, f)$ pour $f \in W$). Soit a, b, c les coordonnées de f dans la base B . Exprimer q en fonction de a, b, c .
8. Réduire par la méthode de Gauss l'expression de q en fonction de a, b, c .
9. En déduire le rang, la signature de q et une base q -orthogonale de W .