

Exercice 1. \diamond Pour chaque espace vectoriel V , dire si oui ou non la famille F d'éléments de V est une base de V .

$$(1) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3) V \subset \mathbb{C}^3, V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\}, \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(4) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 - 3\}.$$

$$(5) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{(X - 1)^2, (X - 1), 1\}.$$

Lorsque F est bien une base, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (pour 1, 2 et 3) ou du polynôme $a + bX + cX^2$ (pour 4 et 5) par rapport à F .

Exercice 2. \diamond Pour chaque espace vectoriel V , dire si oui ou non la partie $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V .

$$1. V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 0 \right\}.$$

$$2. V = \mathbb{C}^3, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x + y - iz = 2 + 3i \right\}.$$

$$3. V = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), W = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f'' + f' = 0\}.$$

$$4. V = \mathbb{R}_3[X], W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (P(3))^2 = P(2)\}.$$

Lorsque W est bien un sous-espace vectoriel, donner une base de W et calculer les coordonnées d'un élément arbitraire de W dans cette base.

Exercice 3. \diamond Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx + (1 + i)y = 1 \\ (1 + i)x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il a) aucune solution ?

b) une solution unique ?

c) une infinité de solutions ?

Exercice 4. \diamond Calculer le noyau et l'image de chaque matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. \diamond Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Démontrer que les équations de la chaleur et des ondes sont bien des équations linéaires.

Exercice 7. Soit $f : V \rightarrow V'$ une application linéaire entre deux espaces vectoriel. Démontrer que $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) sont des sous-espaces vectoriels de V (resp. V').

Exercice 8. \diamond Pour chaque application, indiquer si oui ou non elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image.

1. L'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 donnée par $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ z + 1 \end{pmatrix}$.
2. L'application de \mathbb{C}^3 dans \mathbb{C}^3 donnée par $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ix - iy \\ -iy - z \\ ix + z \end{pmatrix}$.
3. La fonction ϕ qui envoie $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{C})$ sur lui-même donnée par

$$\phi(f) = f' - 2f.$$

Nous rappelons que $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{C})$ est l'espace de fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{C} qui sont dérivables à tous les ordres.

4. La fonction $\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ donnée par $\phi(P) = P' - XP$.
5. La fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donnée par projection sur l'axe des x .
6. La fonction de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 donnée par rotation d'un angle θ autour de l'origine.

Exercice 9. Montrer que les trois fonctions suivantes forment une famille liée dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

$$x \mapsto e^{ix} \quad , \quad x \mapsto \sin(x) \quad , \quad x \mapsto e^{-ix}.$$

Donner la dimension de $\text{Vect}(e^{ix}, \sin(x), e^{-ix})$.

Exercice 10. * Soit n réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Montrer que la famille de fonctions $(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x})$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_0, \dots, P_n des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour chaque i , le degré de P_i soit i . Montrer que la famille (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 12. On se place dans le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ des fonctions polynômes de degré au plus 3.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_3[X]$. Prouver que ce dernier est de dimension 3 et en préciser une base.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes de degré égal à 2?

Exercice 13. \diamond

1. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2\theta = 0$. Montrer que l'ensemble des fonctions du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. En donner une base et la dimension.
2. On considère l'équation différentielle $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$. Est-ce que l'ensemble des fonctions du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$?

Exercice 14.

Nous considérons \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension? En préciser une base.

Exercice 15. \diamond

On considère \mathcal{P} l'ensemble des polynômes sur \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à 2. Un polynôme P de \mathcal{P} sera noté $P(X) = a + bX + cX^2$. Nous admettrons que \mathcal{P} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1. Quelle est la dimension de \mathcal{P} ? En donner une base.
2. On considère les sous-ensembles de \mathcal{P} suivants :
 - (a) $W_0 = \{P \in \mathcal{P} / P(0) = 3\}$,
 - (b) $W_1 = \{P \in \mathcal{P} / P \text{ n'a pas de racine réelle}\}$ et
 - (c) $W_2 = \{P \in \mathcal{P} / a = 0\}$.

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{P} ? Pour ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, en donner une base et donner le vecteur des coordonnées d'un polynôme P arbitraire dans cette base.

3. De même, on considère les applications de \mathcal{P} dans \mathbb{R} suivantes :

- (a) $f_0(P) = P(3)$,
- (b) $f_1(P) = d$ ($d \in \mathbb{R}$),
- (c) $f_2(P) = P'(1)$,
- (d) Si $P(X) = a_P + b_P X + c_P X^2$, on pose $f_3(P) = a_P \cdot a + b_P \cdot b + c_P \cdot c$ ($(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$),
- (e) $f_5(P) = (a_P + b_P + c_P)^2$.

Lesquelles sont des applications linéaires?