Math04 . 2022. Corrigé du partiel.

Ex. I $\quad q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4yz$.

1) Formules du cours : $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right).$$

2) $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$.

3) $M_q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (à partir de l'expression de q en coordonnées).

4) $q(x,y,z) = (x-y)^2 + 4(y^2+yz)$

$$= (x-y)^2 + 4\left(y+\tfrac{1}{2}z\right)^2 - z^2$$

On a bien obtenu une expression de q comme somme des carrés de 3 formes linéaires indépendantes.

On en déduit : $sgn(q) = (2,1)$, $rg\, q = 3$ $(= 2+1)$.

5) Soit P la matrice de passage de la base canonique vers une base dans laquelle l'expression de q est $q(x',y',z') = x'^2 + 4y'^2 - z'^2$.

Alors on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

où $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y + \frac{1}{2}z \\ z' = z \end{cases}$ $\quad$ Il vient $\begin{cases} x = x' + y' - \frac{1}{2}z' \\ y = y' - \frac{1}{2}z' \\ z = z' \end{cases}$

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire que la base suivante est q-orthogonale :

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

6) Par définition, le noyau de φ est le noyau de toute matrice représentant φ. Or, le rang de M_q est 3, donc son noyau est réduit à 0 : $\ker \varphi = \{0\}$.

Rappel : $u \in \ker \varphi \iff \forall v \in E,\ \varphi(u,v) = 0$

Un vecteur tel que $q(u)=0$ est dit isotrope, c'est différent du noyau : $u \in \ker \varphi = \ker q \Rightarrow q(u) = 0$ mais l'implication réciproque n'est pas vraie en général.

Ici, la signature est mixte donc il existe des vecteurs isotropes ce sont les vecteurs qui vérifient, en coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$: $x'^2 + 4y'^2 = z'^2$. (c'est un cône).

donc par exemple $x' = 1, z' = 1$ ou $y' = 1, z' = 2$

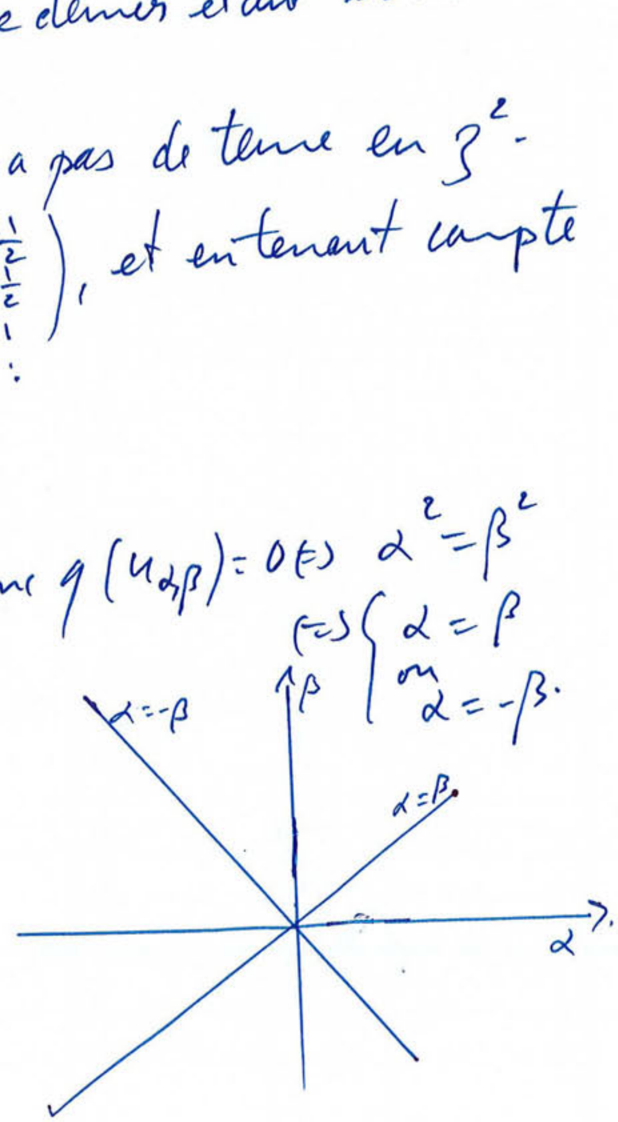
soit : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce dernier étant évident sur la formule de q puisqu'il n'y a pas de terme en z^2.

7) en posant $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, et en tenant compte des questions 4 et 5, on remarque :

$$u_{\alpha\beta} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha b_2 - 2\beta b_3$$

donc $q(u_{\alpha,\beta}) = 4\alpha^2 - 4\beta^2$. donc $q(u_{\alpha\beta}) = 0 \iff \alpha^2 = \beta^2 \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta. \end{cases}$

L'ensemble recherché est donc l'union de deux droites :



Ex. 2

1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P+Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + 4X(\lambda P+Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P''+Q'') + 4X(\lambda P'+Q') \\ &= \lambda(X^2-1)P'' + \lambda 4XP' + (X^2-1)Q'' + 4XQ' \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q).\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire.

2) Calculons : $\phi(1) = 0$ car $1' = 1'' = 0$

$\phi(X) = 4X$ car $X' = 1$, $X'' = 0$

$\phi(X^2) = (X^2-1)\times 2 + 4X \times 2X$ car $(X^2)' = 2X$, $(X^2)'' = 2$

$= 10X^2 - 2$.

D'où la matrice de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) M_ϕ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $0, 4, 10$.
Comme il y a trois valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3, elles sont toutes simples : la matrice est diagonalisable et les trois espaces propres sont de dimension 1.

On voit sur la matrice :

$1 \in \ker \phi$, $X \in \ker(\phi - 4I)$.

donc $E_0 = \ker \phi = \mathrm{Vect}(1)$

$E_4 = \ker(\phi - 4I) = \mathrm{Vect}(X)$.

Il reste à trouver un vecteur propre pour la valeur propre

10 : Soit $P = a + bX + cX^2$.

$$\phi(P) = 10P \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 10a \\ 4b = b \\ 10c = 10c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_{10} = \ker(\phi - 10I) = \mathrm{Vect}(5X^2 - 1)$.

4) $b(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,dt$.

Le produit étant commutatif, b est symétrique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{aligned} b(\lambda P + Q, R) &= \int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t) R(t)(1-t^2)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\lambda P(t) R(t)(1-t^2) + Q(t)R(t)(1-t^2)\right] dt \\ &= \lambda b(P, R) + b(Q, R). \end{aligned}$$

Donc b est linéaire à gauche, donc également à droite par symétrie.

Conclusion : b est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour calculer la matrice M de b dans la base $(1, X, 5X^2-1)$ nous allons calculer les images de b sur les couples d'éléments de la base canonique : Soit $i,j=0,1,2$:

$$b(X^i, X^j) = \int_{-1}^{1} t^{i+j}(1-t^2)\,dt$$

- Si $i+j$ est impair, la fonction à intégrer est impaire. Son intégrale sur un intervalle centré en 0 est donc nulle.
- Si $i+j$ est pair, la fonction est paire, et

$$b(X^i, X^j) = 2\int_0^1 \left(t^{i+j} - t^{i+j+2}\right) dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{i+j+1} - \frac{1}{i+j+3}\right)$$

$$= \frac{4}{(i+j+1)(i+j+3)}$$

De là, on tire :

$$b(1,1) = \frac{4}{3}, \quad b(1,X) = 0, \quad b(1,X^2) = \frac{4}{15}$$

$$b(X,X^2) = 0, \quad b(1,X^2) = b(X,X)$$

$$b(X^2,X^2) = \frac{4}{35}$$

Il reste à calculer :

$$b(1,5X^2-1) = 5\,b(1,X^2) - b(1,1) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

$$b(X,5X^2-1) = 5\,b(X,X^2) - b(X,1) = 0$$

$$b(5X^2-1,5X^2-1) = 25\,b(X^2,X^2) - 10\,b(X^2,1) + b(1,1)$$

$$= 25 \times \frac{4}{35} - 10 \times \frac{4}{15} + \frac{4}{3} = 4\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 32/21.$$

On obtient donc la matrice :

$$\mathcal{M}_b = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/15 & 0 \\ 0 & 0 & 32/21 \end{pmatrix}$$

On observe que cette base est b-orthogonale.

5) D'abord, remarquons que l'énoncé nous a demandé de montrer que b définissait une "FBS" sur $\mathbb{R}_2[X]$ seulement, mais nous avons eu la présence d'esprit de le vérifier dans le cas général, ce qui évite de répéter ici ce calcul pénible.

Ensuite, on a : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall t \in [-1,1]$,

$$P^2(t)(1-t^2) \geqslant 0.$$

On a donc : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $b(P,P) \geqslant 0$.

Déterminons les polynômes P qui vérifient $b(P,P)=0$.

Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$, un polynôme tel que $b(P,P)=0$.

On rappelle une propriété bien connue des fonctions positives <u>continues</u> : si $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifie :

$\left(\forall t \in [a,b]\ f(t) \geqslant 0\right)$ et $\int_a^b f(t)\,dt = 0$,

alors $\forall t \in [a,b]$, $f(t)=0$.

Comme la fonction $f : t \mapsto P^2(t)(1-t^2)$ est polynomiale sur $\mathbb{R}$, elle est continue. On déduit donc de l'énoncé rappelé que $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = 0$.

Or, $\forall t \in]-1,1[$, $1-t^2 \neq 0$, donc $f(t) = 0 \Rightarrow P^2(t) = 0$
$\Rightarrow P(t) = 0$

L'ensemble $]-1,1[$ étant infini, nous en déduisons que le polynôme P admet une infinité de racines, il est donc nul.

Nous avons bien montré que b est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

__Remarque__ : Toute preuve plus courte est incomplète !

6) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$b(\phi(P), Q) = \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)P''(t) + 4tP'(t)\right] Q(t)(1-t^2)\, dt.$$

$$= -\int_{-1}^{1} (1-t^2)Q(t)P''(t)\, dt + \int_{-1}^{1} 4t P'(t) Q(t)(1-t^2)\, dt$$

Nous allons intégrer par parties le premier terme en posant :

$u(t) = (1-t^2)Q(t)$ d'où $u'(t) = (1-t^2)Q'(t) - 4t(1-t^2)Q(t)$

$v(t) = P'(t)$ $\qquad v'(t) = P''(t)$.

$$\int_{-1}^{1} u(t)v'(t)\, dt = \left[u(t)v(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u'(t)v(t)\, dt$$

$$b(\phi(P),Q) = -\left[(1-t^2)Q(t)P'(t)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} P'(t)\,Q'(t)\,(1-t^2)\,dt$$

$$-\int_{-1}^{1} 4t(1-t^2)P'(t)Q(t)\,dt + \int_{-1}^{1} 4t(1-t^2)P'Q\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P'(t)\,Q'(t)\,(1-t^2)\,dt\,.$$

7) La formule obtenue à la question précédente donne une expression symétrique en (P,Q) pour $b(\phi(P),Q)$.

par conséquent $b(\phi(P),Q) = b(\phi(Q),P)$

$= b(P,\phi(Q))$ par symétrie de b.

8) <u>Remarque 1</u>: D'après les questions 3 et 4, on peut fixer :

$L_0 = 1,\ L_1 = X,\ L_2 = 5X^2 - 1$

$\left(\lambda_0 = 0 = 0 \times (0+3),\ \lambda_1 = 4 = (1 \times (1+3)),\ \lambda_2 = 10 = 2(2+3)\right)$.

<u>Remarque 2</u> : si $i \neq j$, $i(i+3) \neq j(j+3)$.

On peut par exemple justifier ça en étudiant la fonction t^2+3t sur $\mathbb{R}^+$ ou en remarquant que l'équation $x(x+3) = y$ a des solutions symétriques par rapport à $-\frac{3}{2}$, donc une seule positive.

Soit $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$

On a $b(\phi(L_i), L_j) = b(i(i+3) L_i, L_j)$

$= i(i+3)\, b(L_i, L_j)$.

et $b(L_i, \phi(L_j)) = j(j+3)\, b(L_i, L_j)$.

D'après 7, on déduit que $i(i+3)\, b(L_i, L_j) = j(j+3)\, b(L_i, L_j)$

La remarque 2 ci-dessus nous permet donc d'affirmer :

$b(L_i, L_j) = 0$ si $i \neq j$.

En d'autres termes : la famille $(L_i, i = 0, \ldots, n)$ est orthogonale.

9) Soit $k \geq 1$. D'après la question précédente, $\forall i < k$, $b(L_i, L_k) = 0$, i.e. L_k est orthogonal à tous les L_i, $i = 0, \ldots, k-1$, qui forment une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(L_0, \ldots, L_{k-1})$.

On a donc clairement que $L_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp_b}$

10) $1 \in \mathbb{R}_k[X]$ $\forall k \geq 0$, ou $1 \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ $\forall k \geq 1$.

donc le résultat précédent donne : $b(L_k, L_0) = 0$ $\forall k \geq 1$.

ce qui est exactement la formule demandée.

11) Si L_k ne possède pas de racine dans $]-1,1[$, il garde un signe constant (d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction <u>continue</u> $t \mapsto L_k(t)$)
Comme il en est de même pour $1-t^2$, on aurait, quitte à remplacer L_k par $-L_k$:

$\forall t \in]-1,1[, \quad L_k(t)(1-t^2) > 0$ et $\int_{-1}^{1} L_k(t)(1-t^2)\,dt = 0$

ce qui est une contradiction à nouveau parce que l'intégrand est continu.

Il est donc nécessaire que L_k admette une racine dans l'intervalle $]-1,1[$.

12) Par hypothèse, L_k est un polynôme de degré k. Il admet donc au plus k racines. On suppose de plus qu'une de ses racines ρ n'est pas dans l'intervalle $[-1,1]$, ou qu'elle est de multiplicité supérieure à 1. Cela signifie que ρ ne fait pas partie des t_i, $i=1,\dots,p$ si $\rho \notin [-1,1]$ ou si elle est de multiplicité paire, et que si $\rho \in [-1,1]$ et est égale à l'une des t_i, alors cette racine est de multiplicité au moins 3.
Dans le premier cas, on déduit que $p \leq k-1$, et dans le second que $p \leq k-2$. Dans tous les cas, $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc $b(Q, L_k) = 0$, ce qui est l'égalité recherchée.

13) On peut écrire $L_k(X) = A_k(X) \prod_{i=1}^{p} (X-t_i)^{\alpha_i}$

avec : $A_k(X)$ un polynôme de signe constant sur $[-1,1]$ puisque, s'il a des racines dans $]-1,1[$, elles sont de multiplicité paire.

$\forall i = 1,\dots,p$, α_i est impair.

Par conséquent, $L_k Q = A_k(X) \prod_{i=1}^{p} (X-t_i)^{\alpha_i+1}$.

est un polynôme de signe constant sur $[-1,1]$.

À nouveau, la continuité et la nullité de l'intégrale impliquent qu'il est nul. Mais ceci implique que A_k est identiquement nul par exemple sur $]-1,t_1[$, et ce doit donc être le polynôme nul.

La contradiction vient du fait que L_k est un élément d'une base (ou $\deg L_k = k$, pour $k>0$) et ne peut donc pas être nul.