Corrigé DS2 Math 404 2022.

Ex. 1 $q(x,y,z,t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt$

1) $M_q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) $q(x,y,z,t) = (x+3y+2z)^2 + 4(yz + yt + 2zt)$

$= (x+3y+2z)^2 + 4(y+2t)(z+t) - 8t^2.$

$= (x+3y+2z)^2 + (y+z+3t)^2 - (y-z+t)^2 - 8t^2.$

On a bien les carrés de 4 formes linéaires indépendantes.

3) Il vient : $\operatorname{rg} q = 4$, $\operatorname{sign} q = (2,2)$.

4) On cherche la base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les nouvelles coordonnées sont :

$$\begin{cases} x' = x+3y+2z \\ y' = y+z+3t \\ z' = y-z+t \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - (3y+2z) \\ y+z = y' - 3t' \\ y - z = z' - t' \\ t = t' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' - \frac{5}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 8t' \\ y = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' - 2t' \\ z = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' - t' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{d'où } P = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & -\frac{1}{2} & 8 \\ 0 & 1/2 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conclut : dans la base,

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

on a l'expression suivante de q :

$$q_{\mathcal{B}'}(x', y', z', t') = x'^2 + y'^2 - z'^2 - 8t'^2$$

d'où la matrice $M_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

5) $$q'(x,y,z,t) = (x+3y+2z)^2 + (y+z+3t)^2 + (\alpha-1)(y-z+t)^2 + (\beta-8)t^2.$$

On voit que q' est ≥ 0 sur $\mathbb{R}^4$ ssi $\alpha - 1 \geq 0$ et $\beta - 8 \geq 0$

et définie positive ssi $\alpha > 1$, $\beta > 8$.

Précisément : q' est sous forme de somme de carrés. Cette forme quadratique est non dégénérée si tous les coefficients sont non nuls ($\alpha \neq 1$, $\beta \neq 8$). C'est un produit scalaire si tous les coefficients sont strictement positifs (la signature est $(4,0)$).

q' est donc un produit scalaire si et seulement si $\alpha > 1$, $\beta > 8$.

Ex. 2

1) Posons $J_n = 2\int_0^{+\infty} t^n e^{-2t}\,dt$.

En supposant que cette intégrale converge, nous allons faire une intégration par parties en posant :

$u(t) = t^n \qquad u'(t) = n t^{n-1}$

$v(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} \qquad v'(t) = e^{-2t}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a donc, pour $n \geq 1$:

$$2\int_0^x t^n e^{-2t}\,dt = 2\left(\left[t^n\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right]_0^x - \int_0^x n t^{n-1}\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)dt\right)$$

$$= -x^n e^{-2x} + n\int_0^x t^{n-1} e^{-2t}\,dt.$$

Par comparaison exponentielle / polynôme, on a $x^n e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc, si J_{n-1} converge, J_n converge, et

$$J_n = \frac{n}{2} J_{n-1}.$$

Regardons maintenant J_0.

On a $2\int_0^x e^{-2t}\,dt = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$

$$= \frac{2}{2} - e^{-2x}$$

$$\to 1.$$

donc $J_0 = 1$.

On peut donc démontrer par récurrence la propriété :
$P(n)$: " J_n est bien définie et $J_n = \frac{n!}{2^n}$ "

<u>Initialisation</u> : Nous venons de voir que J_0 est bien définie (la limite existe) et $J_0 = 1 = \frac{0!}{2^0}$.

Hérédité :
Supposons que J_{n-1} existe et $J_{n-1} = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}}$.

Alors le calcul précédent montre que J_n existe et $J_n = \frac{n}{2} J_{n-1} = \frac{n!}{2^n}$.

La propriété $P(n)$ est bien montrée par récurrence.

2) D'après la question précédente, si $R \in \mathbb{R}[X]$, $J_R = 2\int_0^{+\infty} R(t) e^{-2t} dt$ est bien définie et, si $R(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $J_R \geq 0$.

Si $R = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on aura $J_R = \sum_{i=0}^{d} a_i J_i$.

Il est donc clair que l'application $R \to J_R$ est linéaire (on retrouve la linéarité de l'intégrale).

De là il découle que $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, et $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$

i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P \rangle = 2\int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-2t} dt$

où $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $P^2(t) e^{-2t} \geq 0$ donc $\langle P, P \rangle \geq 0$.

Enfin, si $\langle P,P\rangle=0$ on a $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-2t}dt = 0$.

S'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $P(t_0)\neq 0$, il existe un intervalle autour de t_0 sur lequel $P^2(t) > 0$ (par continuité de P).

De là, on voit que $\forall x \geq t_0$, $\int_0^x P^2(t)e^{-2t}dt > 0$.

d'où $\langle P,P\rangle \geq \int_0^{t_0} P^2(t)e^{-2t}dt > 0$.

On a donc : Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $P\neq 0$. P a un nombre fini de racines donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $P(t_0)\neq 0$, donc $\langle P,P\rangle > 0$.

Conclusion : $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire.

3) Posons $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$.

L'algorithme de Gram-Schmidt dans sa version orthogonale donne :

$$u_1 = e_1, \quad \|u_1\|^2 = J_0 = 1.$$

$$u_2 = X - \langle X, e_1\rangle \cdot e_1$$
$$= X - J_1 e_1$$
$$= X - \frac{1}{2} \qquad \|u_2\|^2 = \|X\|^2 - \frac{1}{4}\|e_1\|^2$$
$$= J_2 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$u_3 = X^2 - \frac{\langle X^2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 - \langle X^2, u_1\rangle u_1.$$
$$= X^2 - 4\left(J_3 - \frac{1}{2}J_2\right)u_2 - J_2 = X^2 - 2u_2 - \frac{1}{2}.$$

$u_3 = X^2 - 2X + \frac{1}{2}$.

$$\|u_3\|^2 = \|X^2\|^2 - \left(4\|u_2\|^2 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= J_4 - \frac{5}{4}$$
$$= \frac{1}{4}.$$

On obtient donc comme base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$(v_1, v_2, v_3) = (1, 2X-1, 2X^2 - 4X + 1).$$

4) La formule de la projection orthogonale dans une base orthonormée nous fournit l'expression suivante pour $\pi(X^3)$:

$$\pi(X^3) = \langle X^3, v_1\rangle v_1 + \langle X^3, v_2\rangle v_2 + \langle X^3, v_3\rangle v_3$$
$$= J_3 v_1 + (2J_4 - J_3) v_2 + (2J_5 - 4J_4 + J_3) v_3$$

avec : $J_3 = \frac{3!}{2^3} = \frac{3}{4}$

$$J_4 = \frac{4!}{2^4} = \frac{8 \times 3}{8 \times 2} = \frac{3}{2}.$$

$$J_5 = \frac{5}{2} J_4 = \frac{15}{4}.$$

Il vient

$$\pi(X^3) = \frac{3}{4} v_1 + \frac{9}{4} v_2 + \frac{9}{4} v_3$$
$$= \frac{9}{2} X^2 - \frac{9}{2} X + \frac{3}{4}.$$

5) C'est donc le polynôme $\pi(X^3)$ qui réalise le minimum de la distance entre X^3 et un polynôme de degré 2.

le minimum de $\int_0^{+\infty} (t^3+at^2+bt+c)^2 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\|X^3-P\|^2, P\in\mathbb{R}_2[X]$

est donc atteint pour $P=\pi(X^3)$, ce qui équivaut à dire

$(a,b,c) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

On a alors $2\delta = \|X^3\|^2 - \|\pi(X^3)\|^2$

$$= J_6 - \left(\frac{9}{16} + \frac{81}{16} + \frac{81}{16}\right)$$

$$= \frac{45}{4} - \frac{9}{16}(1+9+9)$$

$$= \frac{9}{16}(20-19)$$

$$= \frac{9}{16}.$$

$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{3}{4}$.

d'où $\delta = 9/32$.