Mat 404 CC1 corrigé

Ex. 1 a) La base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est la famille $\left\{ e_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, e_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$.

b) Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ t.q.

$$a\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0$$

en coordonnées : $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c+d=0 \\ -c+d=0 \\ d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$

donc la famille F est un système libre de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Comme cette famille est de cardinal 4 dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4, c'est une base.

c) On calcule : $g(e_{11})=e_{11}$, $g(e_{12})=e_{21}$, $g(e_{21})=e_{12}$, $g(e_{22})=e_{22}$.

d'où la matrice de g dans la base canonique :

$$M_e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

De même, en notant f_i les éléments de F :

$g(f_1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=f_1-f_3$

$g(f_2)=f_2$ d'où la matrice : $M_F=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$g(f_3)=-f_3$

$g(f_4)=f_4$

Ex. 2 a: $\phi(P) = 4P - XP' - X^2P''$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\phi(\lambda P + Q) = 4(\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' - X^2(\lambda P + Q)''$$
$$= \lambda(4P - XP' - X^2P'') + 4Q - XQ' - X^2Q''$$
$$= \lambda\phi(P) + \phi(Q)$$

donc ϕ est bien une application linéaire.

2) Pour déterminer le noyau de ϕ, cherchons les polynômes P tels que $\phi(P) = 0$.

posons $P = a + bX + cX^2$

alors $\phi(P) = 4(a + bX + cX^2) - X(b + 2cX) - X^2(2c)$

$$= 4a + 3bX.$$

Donc $\phi(P) = 0 \iff a = b = 0$

$\iff P \in \mathrm{Vect}(X^2)$.

Conclusion : $\ker\phi = \mathrm{Vect}(X^2)$, $\dim \ker\phi = 1$.

$\ker\phi$ est la droite engendrée par X^2, qui est un élément non nul de $\mathbb{R}_2[X]$, donc forme une base.

Le calcul de $\phi(P)$ ci-dessus montre que tout polynôme de degré ≤ 1 est dans l'image de ϕ, et que tout élément de l'image est un polynôme de degré ≤ 1.

On a donc $\mathrm{Im}\,\phi = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$.

$\{1, X\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_1(X)$ donc de $\mathrm{Im}\,\phi$.

Donc $\mathrm{rg}\,\phi = 2$. On vérifie $\mathrm{rg}\,\phi + \dim\ker\phi = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2(X)$

5) 1) $\psi(f) = f'' - k^2 f$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\psi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' - k^2(\lambda f + g)$$
$$= \lambda (f'' - k^2 f) + g'' - k^2 g$$
$$= \lambda \psi(f) + \psi(g).$$

donc ψ est linéaire.

2) Soient $f, g \in \ker \psi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda f + g) = \lambda \psi(f) + \psi(g) \quad (\text{par linéarité de } \psi)$$
$$= 0 \quad \text{car } \psi(f) = \psi(g) = 0.$$

donc $\lambda f + g \in \ker \psi$, ce qui prouve que $\ker \psi$ est bien un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (en tenant compte de la remarque qu'un noyau n'est jamais vide car $\psi(0) = 0$ si ψ est linéaire).

D'après le cours sur les équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, $\ker \psi = \{ \lambda e^{kt} + \mu e^{-kt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$ car c'est l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - k^2 y = 0$. d'équation caractéristique $r^2 - k^2 = 0$.

en notant $f_+(t) = e^{kt}$ et $f_-(t) = e^{-kt}$, on voit que $\ker \psi = \mathrm{Vect}(f_+, f_-)$.

Il reste donc à vérifier que (f_+, f_-) est un système libre pour en déduire que c'est une base de $\ker \varphi$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\lambda f_+ + \mu f_- = 0$

alors on en déduit $(\lambda f_+ + \mu f_-)(0) = 0$ et $(\lambda f_+' + \mu f_-')(0) = 0$

soit.. $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ k(\lambda - \mu) = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$

Conclusion : (f_+, f_-) est une base de $\ker \varphi$.

3) Pour déterminer l'image de φ, il faut regarder pour quels seconds membres $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation $\varphi(f) = g$ admet au moins une solution.

Un résultat* de la théorie des équations linéaires permet d'assurer que cette équation admet toujours des solutions globales.

Par conséquent, $\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (dit autrement : φ est surjective)

---

* Apparemment, ce type de résultat est hors-programme.

On peut appliquer la méthode de variations des constantes qui revient à chercher une solution sous la forme

$$f(t) = A(t) f_+(t) + B(t) f_-(t)$$

en ajoutant la condition $A'(t) f_+(t) + B'(t) f_-(t) = 0$.

On a donc : $f = A f_+ + B f_-$

$$f' = A f_+' + B f_-' + \underbrace{A' f_+ + B' f_-}_{=0}$$

$$f'' = \underbrace{A f_+'' + B f_-''}_{=k^2 f} + A' f_+' + B' f_-'$$

d'où

$$\begin{cases} A' f_+ + B' f_- = 0 \\ k A' f_+ - k B' f_- = g. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A' f_+ = g/k \\ 2B' f_- = -g/k. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' = g/_{2k}\, f_- \\ B' = -g/_{2k}\, f_+. \end{cases}$$

Car A' et B' sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on peut trouver deux primitives A et B, ce qui démontre bien que l'équation $y'' - k^2 y = g$ admet bien des solutions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f(t) = A(t) e^{kt} + B(t) e^{-k}$$

avec $A(t) = \frac{1}{2k} \int g(t) e^{-kt} dt$

$$B(t) = -\frac{1}{2k} \int g(t) e^{kt} dt .$$

Ex. 3 Avec des notations plus classiques,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

a) $$\phi\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = y_1 x_1 + y_2 x_2 - y_1 x_2 - y_2 x_1$$
$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

donc ϕ est symétrique. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_1', x_2', y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\phi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (\lambda x_1 + \mu x_1') y_1 + (\lambda x_2 + \mu x_2') y_2$$
$$- (\lambda x_1 + \mu x_1') y_2 - (\lambda x_2 + \mu x_2') y_1$$

$$= \lambda x_1 y_1 + \mu x_1' y_1 + \lambda x_2 y_2 + \mu x_2' y_2 - \lambda x_1 y_2 - \mu x_1' y_2$$
$$- \lambda x_2 y_1 - \mu x_2' y_1$$
$$= \lambda\, \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \mu\, \phi\left(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

donc ϕ est linéaire à gauche. Comme elle est symétrique ϕ est également linéaire à droite, donc bilinéaire.

b) On calcule $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$

donc $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ donc le rang de cette matrice est 1.

Par définition du rang de ϕ, on en déduit $\operatorname{rg} \phi = 1$.

c) $\phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1+1-1-1$
$= 0$

$\phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 1-1-1+1 = 0.$

$\phi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 1+1+1+1 = 4.$

donc $M_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}.$

Vérification (ou autre méthode).

$$
{}^tP M_1 P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}.
$$