Groupe de Travail

Flot de Ricci, papiers de Perelman

Notes sur le premier papier: The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application

2 Séance 2: liens avec le flot de Ricci et applications (11.12.2003)

2.1 Liens avec le flot de Ricci

On considère donc le flot de gradient

$$(G)\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}g_t = -2\left(Ric_{g_t} + Hess_{g_t}f_t\right) \\ \frac{d}{dt}f_t = \Delta_{g_t}f_t - scal_{g_t} \end{array}\right.$$

Remarque 2. *Ces équations n'ont pas toujours de solution. En particulier, la deuxième équation commence comme une équation de la chaleur rétrograde.*

Action du groupe de difféomorphismes

En faisant agir $Diff(M)$ sur $Met(M) \times C^\infty(M)$ de manière diagonale

$$\varphi.(g,f) = (\varphi^* g, f \circ \varphi),$$

on va retrouver le flot de Ricci.

Appelons $X_t = \nabla_{g_t} f_t$, le champ de vecteur sur M, dépendant du temps. La résolution de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\varphi_t(p) = X_t(\varphi_t(p)) \\ \varphi_0(p) = p \end{array}\right.$$

conduit à une famille à un paramètre de difféomorphismes $\varphi_t : M \longrightarrow M$. Ce n'est pas en général un groupe à un paramètre car $\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi_{t+s}(p) = X_t(\varphi_t(p))$ alors que $\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi_s \circ \varphi_t(p) = X_0(\varphi_t(p))$, qui peut être différent si X_t n'est pas constant. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{g}_t = \varphi_t^* g_t \\ \tilde{f}_t = f_t \circ \varphi_t \end{array}\right.$$

Lemme 2.1. *On a*

$$(R)\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\tilde{g}_t = -2Ric_{\tilde{g}_t} \\ \frac{d}{dt}\tilde{f}_t = \Delta_{\tilde{g}_t}\tilde{f}_t - scal_{\tilde{g}_t} + |\nabla_{\tilde{g}_t}\tilde{f}_t|^2_{\tilde{g}_t} \end{array}\right.$$

Note : La première équation est celle étudiée par R. Hamilton, c'est à dire le flot de Ricci.

Preuve du lemme: comme ce changement est crucial et nous a donné un peu de mal, on donne une preuve détaillée.

première égalité On montre facilement que

$$\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi^*_{t+s}g_{t+s} = \varphi_t^*\frac{d}{ds}_{|s=0}g_{t+s} + \frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi^*_{t+s}g_t$$

Le premier terme donne

$$\varphi_t^*\left(-2(Ric_{g_t} + Hess_{g_t}f_t)\right) = -2\left(Ric_{\tilde{g}_t} + Hess_{\tilde{g}_t}\tilde{f}_t\right)$$

car $\varphi_t : (M, \varphi_t^* g_t) \longrightarrow (M, g_t)$ est une isométrie. Pour éliminer le hessien, il reste à voir que

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi_{t+s}^* g = \varphi_t^*(2Hess_{g_t} f_t)$$

Posons $g = g_t$, $f = f_t$ et $X = X_t = \nabla f$. Rappelons que $s \to \varphi_{t+s}$ n'est pas en général le flot de difféomorphisme associé à X: on a seulement $\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi_{t+s}(p) = X(p)$ en $s = 0$. Néanmoins, on a le

Fait :

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi_{t+s}^* g = \varphi_t^* L_X g = \varphi_t^*(2Hess f)$$

où L est la dérivée de Lie.

Preuve du fait: D'abord, on va voir que $t \to \varphi_t$ se comporte presque comme un morphisme. Définissons pour $t, s \geq 0$ les difféomorphismes $\Phi_t^s : M \longrightarrow M$ comme solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\Phi_t^s(p) = X_s(\Phi_t^s(p)) \\ \Phi_t^t(p) = p \end{cases}$$

On a $\varphi_t = \Phi_0^t$. On montre facilement en utilisant l'unicité des solutions que

$$\Phi_{t_2}^{t_3} \circ \Phi_{t_1}^{t_2} = \Phi_{t_1}^{t_3}$$

En particulier,

$$\Phi_t^{t+s} \circ \Phi_{t+s}^t = id_M = \Phi_{t+s}^t \circ \Phi_t^{t+s}$$

et

$$X = X_t = \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi_t^{t+s}, \qquad -X = \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi_{t+s}^t$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi_{t+s}^* g &= \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi_0^{t+s*} g \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0} (\Phi_t^{t+s} \circ \Phi_0^t)^* g \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0} (\Phi_0^t)^* (\Phi_t^{t+s})^* g \\ &= \varphi_t^* \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi_t^{t+s*} g \end{aligned}$$

Maintenant, soit U, V des champs de vecteurs au voisinnage de $p \in M$, $u = U(p), v = V(p)$, notons $\gamma(s) = \Phi_t^{t+s}(p)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi_t^{t+s*} g(u,v) &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[\Phi_t^{t+s*} g - g \right](u,v) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[\Phi_t^{t+s*} g(u,v) - g(U,V)_{\gamma(s)} \right] + \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[g(U,V)_{\gamma(s)} - g(u,v) \right] \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[g(u,v) - {\Phi_{t+s}^t}^* g(U,V)(p) \right] + X(p).g(U,V) \qquad (1) \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\Phi^t_{t+s} \to id_M$ quand $s \to 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[g(u,v) - {\Phi^t_{t+s}}^* g(U,V)(p)\right] &= g\left(\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[u - D_{\gamma(s)}\Phi^t_{t+s}U\right], v\right) + g\left(u, \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[v - D_{\gamma(s)}\Phi^t_{t+s}V\right]\right) \\ &= g(-[X,U]_p, v) + g(u, -[X,V]_p) \end{aligned} \qquad (2)$$

où on démontre la dernière égalité comme dans la proposition 1.9 de Kobayashi-Nomizu, Foundations of differentiable manifolds I, page 15. Pour toute fonction h sur M, il existe une fonction k_s telle que $h \circ \Phi^t_{t+s} - h = s.k_s$, avec $k_0 = -X.h$. Si on regarde $D_{\gamma(s)}\Phi^t_{t+s}U$ comme une dérivation, on a

$$\begin{aligned}(D_{\gamma(s)}\Phi^t_{t+s}U.h)_p &= U.(h \circ \Phi^t_{t+s})_p \\ &= (U.h)_{\gamma(s)} + s(U.k_s)_{\gamma(s)}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left([u - D_{\gamma(s)}\Phi^t_{t+s}U]h\right)_p &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(u.h - (U.h)_{\gamma(s)} - s(U.k_s)_{\gamma(s)}\right) \\ &= -X.(U.h)_p + U.(X.h)_p = [U,X].h\ (p)\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de considérer le groupe local à un paramètre de difféomorphisme de X mais seulement d'avoir $\frac{d}{ds}_{|s=0}\Phi^{t+s}_t(p) = X(p)$. On a donc montré (2). En recollant (1) et (2), on a $\frac{d}{ds}_{|s=0}{\Phi^{t+s}_t}^* g = L_X g$ et cela termine la preuve du fait. □.

On conclut $\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi^*_{t+s}g_{t+s} = 2Ric_{\tilde{g}_t}$.

Deuxième égalité On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}_{|s=0}(f_{t+s}\circ\varphi_{t+s}) &= (\frac{d}{ds}_{|s=0}f_{t+s})\circ\varphi_t + \frac{d}{ds}_{|s=0}(f_t\circ\varphi_{t+s}) \\ &= \Delta_{g_t}f_t\circ\varphi_t - scal_{g_t}\circ\varphi_t + g_t(\nabla_{g_t}f_t, \nabla_{g_t}f_t)\circ\varphi_t \\ &= \Delta_{\tilde{g}_t}\tilde{f}_t - scal_{\tilde{g}_t} + |\nabla_{\tilde{g}_t}\tilde{f}_t|^2_{\tilde{g}_t} \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.

- *On a $\mathcal{F}(g,f) = \mathcal{F}(\tilde{g},\tilde{f})$.*
- *Partant d'une solution (g_t, f_t) du flot de Ricci (R), on trouve une solution $(\tilde{g}_t, \tilde{f}_t)$ de (G) en posant $(\tilde{g}_t, \tilde{f}_t)) = \psi_t.(g_t, f_t)$, avec cette fois φ_t le flot de difféomorphisme associé à $-\nabla_{g_t}f_t$. S'il existe toujours des solutions de $\frac{d}{dt}g_t = -2Ric_{g_t}$ en temps petit, l'existence d'une f_t n'est pas garantie car l' équation sur f_t se comporte comme une équation de la chaleur rétrograde.*

Première application

Proposition 2.2 (Perelman I, 1.2). *si le flot du gradient existe sur $[0,T)$, alors*

$$\mathcal{F}(g_0, f_0) \leq \frac{n}{2T}\int_M dm$$

Preuve: On suppose $\int_M dm = 1$. On a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}^m(g_t, f_t) = 2\int_M |Ric_{g_t} + Hess_{g_t}f_t|^2_{g_t}\ dm \qquad (3)$$

On utilise l'inégalité entre la norme et la trace d'une forme quadratique, c'est à dire

$$tr(h)^2 =< h, g >^2 \leq ||h||^2||g||^2 = n||h||^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}^m(g_t, f_t) &\geq \frac{2}{n}\int_M (scal_{g_t} - \Delta_{g_t} f_t)^2 e^{-f_t}\ d\mathcal{V}_{g_t} \\
&\geq \frac{2}{n}\left(\int_M (scal_{g_t} - \Delta_{g_t} f_t) e^{-f_t}\ d\mathcal{V}_{g_t}\right)^2 \\
&= \frac{2}{n}\left(\int_M (scal_{g_t} + |\nabla_{g_t} f_t|^2_{g_t}) e^{-f_t}\ d\mathcal{V}_{g_t}\right)^2 = \frac{2}{n}\mathcal{F}^m(g_t, f_t)^2
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat si la fonctionnelle est positive, sinon c'est trivialement vrai. □.

2.2 Etude des solitons

Soit g_t un solution du flot de Ricci.

Définition 2. *Une trajectoire est appelée un <u>breather</u> s'il existe $t_1 < t_2$, il existe $\alpha > 0$ tel que αg_{t_1} et g_{t_2} diffèrent par un difféomorphisme, c'est à dire s'il existe $\varphi \in Diff(M)$ tel que*

$$\alpha\varphi^* g_{t_1} = g_{t_2}$$

Selon les valeurs de α, 1, $\alpha < 1$ où $\alpha > 1$ on dit qu'il est <u>stable</u>, <u>contractant</u> ou <u>dilatant</u>. On appelle une telle trajectoire un <u>soliton de Ricci</u> si on peut mettre "pour tous t_1, t_2" à la place de "il existe t_1, t_2"'.

Remarque 4. *Soit $\mathcal{M}$ l'espace des métriques, considérons*

$$\mathcal{M}/Diff(M) \oplus \mathbb{R} = \overline{\mathcal{M}}$$

le quotient par les difféomorphismes et les homothéties. Alors sur $\overline{\mathcal{M}}$ les breathers correspondent à des orbites périodiques (au paramétrage du temps près) et les solitons à des points fixes. Si g_t est un breather, en fait pour $t_2 \leq t \leq t_2 + \alpha(t_2 - t_1)$,

$$g_t = \alpha\varphi^*(g_{\frac{t-t_2}{\alpha}+t_1})$$

Le résultat intuitif que l'on va prouver est le suivant

Proposition 2.3 (Perelman I, chapitre 2 et 3). *Tout breather est trivial, c'est à dire que c'est un soliton de Ricci.*

Preuve:

<u>Preuve du cas $\alpha = 1$</u> (Perelman I, 2.2; notes de Kleiner et Lott, chap. 4)

Soit
$$\lambda(g_t) = \lambda(t) = \inf\left\{\mathcal{F}(g_t, f) : \ f \ \int_M e^{-f} \ d\mathcal{V}_{g_t} = 1\right\}$$
On minimise donc pour $g = g_t$,
$$\int_M (scal_g + |\nabla f|^2)e^{-f} \ d\mathcal{V}_g$$
On pose $u = e^{-f/2}$ et on voit que l'on minimise
$$\int_M (scal_g u^2 + 4|\nabla u|^2) \ d\mathcal{V}_g = \int_M (scal_g u^2 + 4u\Delta_g u) \ d\mathcal{V}_g \text{ avec } \int_M u^2 \ d\mathcal{V}_g = 1$$
$\lambda(t)$ est donc la plus petite valeur propre de $4\Delta_g + scal_g$ qui existe et est simple. On peut donc choisir une fonction propre positive u_t dépendant de manière C^∞ de t ainsi que $\lambda(t)$ par la théorie des perturbations. On pose $-2\ln(u_t) = v_t$ donc $\lambda(t) = \mathcal{F}(g_t, f_t)$. On va montrer que $\lambda(t)$ croit. On dérive formellement:
$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= \frac{d\mathcal{F}}{dg}(g_t, v_t).(\frac{d}{dt}g_t) + \frac{d\mathcal{F}}{df}(g_t, v_t).(\frac{d}{dt}v_t) && (4)\\ &= \frac{d\mathcal{F}}{dg}(g_t, v_t).(\frac{d}{dt}g_t) && (5)\end{aligned}$$
car u_t réalise le minimum donc $\frac{d\mathcal{F}}{df}(g_t, v_t) = 0$. Maintenant, si on fixe un t_0 dans $]0, T)$, on peut résoudre
$$(*)\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dt}f_t = \Delta_{g_t}, f_t - scal_{g_t} + |\nabla_{g_t} f_t|^2_{g_t}\\ f_{t_0} = v_{t_0}\end{array}\right.$$
dans le sens rétrograde, c'est à dire sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0]$. Comme f_t réalise le flot du gradient,
$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g_t, f_t) \geq 0$$
sur l'intervalle (voir l'équation (3)). En particulier, au temps t_0,
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t=t_0}\mathcal{F}(g_t, f_t) &= \frac{d\mathcal{F}}{dg}(g_{t_0}, f_{t_0}).(\frac{d}{dt}_{|t=t_0}g_t) + \frac{d\mathcal{F}}{df}(g_{t_0}, f_{t_0})(\frac{d}{dt}_{|t=t_0}f_t)\\ &= \frac{d\mathcal{F}}{dg}(g_{t_0}, v_{t_0}).(\frac{d}{dt}_{|t=t_0}g_t)\\ &= \lambda'(t_0) \geq 0\end{aligned}$$
Alors si $g_{t_2} = \varphi^* g_{t_1}$, grâce à l'invariance de la fonctionnelle sous l'action des difféomorphismes, on a
$$\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$$
donc $\forall t \in [t_1, t_2]$, $\lambda'(t) = 0$. Or
$$\lambda'(t) = 2\int_M |Ric_{g_t} + Hess_{g_t} v_t|^2_{g_t} e^{-v_t} d\mathcal{V}_{g_t}$$
d'où
$$Ric_{g_t} + Hess_{g_t} v_t = 0$$

En considérant les difféomorphismes ψ_t engendrés par $-\nabla_{g_t} v_t$, on obtient pour $\tilde{g_t} = \psi_t^* g_t$ et $\tilde{v_t} = v_t \circ \psi_t$

$$\frac{d}{dt}\tilde{g_t} = -2(Ric_{\tilde{g_t}} + Hess_{\tilde{g_t}}\tilde{v_t}) = -2\psi_t^*(Ric_{g_t} + Hess_{g_t} v_t) = 0$$

d'où $\tilde{g_t} = \tilde{g_0} = cte$ et $g_t = (\psi_t^{-1})^* g_0$ est un soliton.□

Exemple de soliton (notes de Kleiner et Lott, 3.1)

Dans $\mathbb{R}^n$ (non compact mais ce n'est pas grave). On fixe la métrique à être canonique, constante en t. Soit $t_0 > 0$, on pose $\tau = t_0 - t$,

$$f(t,x) = \frac{|x|^2}{4\tau} + \frac{n}{2}\ln(4\pi\tau)$$

$e^{-f} = (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}$ est le noyau de la chaleur pour $\tau \in [0, t_0]$ (alors t va de t_0 à 0). Par ailleurs f est normalisée car

$$\frac{1}{(4\pi\tau)^{-n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}} dv = 1$$

On calcule facilement

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 e^{-f} dv = \frac{n}{2\tau} = \frac{n}{2(t_0 - t)}$$

En particulier, $\mathcal{F}$ est croissante. On travaille sur une variété non compacte avec une densité gaussienne.