Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 5 - 13 et 20 octobre 2003
Applications de l'analyse de Fourier et de la convolution

Exercice 1. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ telle que u et toutes ses dérivées partielles tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions $(1+|x|)^{-k}$ avec $k>0$. On rappelle que la transformation de Fourier induit une bijection de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même. On cherche à déterminer toutes les solutions u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + N\, u = 0.$$

Pour cela, supposer que u est solution et poser $v(\xi) := e^{\frac{|\xi|}{2}^2} \widehat{u}(\xi)$. Calculer $\sum_{j=1}^N \xi_j \frac{\partial v}{\partial \xi_j}$ et conclure.

Exercice 2. On garde les notations de l'exercice 1. Soient f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
a) Montrer que l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - u = f$ admet une unique solution u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
b) Que dire de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - i\, u = f$?

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}^3$)

$$(E) \quad (\Delta - \lambda)u = f,$$

où f est de classe C^4, toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4 étant intégrables.
a) En étudiant le comportement de $\widehat{f}(\xi)$ lorsque $|\xi| \to +\infty$, montrer que la fonction $\overline{\mathcal{F}}(\frac{\widehat{f}}{|\xi|^2+\lambda})$ est bien définie, qu'elle est de classe C^2 et que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables.
b) En déduire que $u = -(2\pi)^{-3}\overline{\mathcal{F}}(\frac{\widehat{f}}{|\xi|^2+\lambda})$ est solution de (E).

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^2 et à support compact sur $\mathbb{R}^3$. On veut déterminer les solutions u de classe C^2 et tendant vers 0 à l'infini de l'équation $\Delta u = f$. L'existence de u est montrée dans cet exercice et l'unicité dans l'exercice suivant. On pose
$u(x) = -\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} f(y)dy$
a) Montrer que u est de classe C^2.
b) Soient $\varepsilon > 0$ et g_ε définie par $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $g_\varepsilon(x) = G_\varepsilon(|x|)$, où G_ε est définie par
$G_\varepsilon(r) = 1/r$ pour $r \geq \varepsilon$ et
$G_\varepsilon(r) = a_\varepsilon r^3 + b_\varepsilon r^2 + c_\varepsilon$ pour $0 \leq r < \varepsilon$,
les coefficients a_ε, b_ε et c_ε étant choisis de sorte que G_ε est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Calculer ces coefficients.
c) Calculer $\Delta g_\varepsilon(x)$.
d) Montrer que $\Delta u(x) = f(x)$.
Indication : montrer

$$\Delta u(x) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} g_\varepsilon(x-y) \Delta f(y)dy = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta g_\varepsilon(x-y) f(y)dy.$$

e) Montrer que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Exercice 5.
Soit v une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N$ tendant vers 0 à l'infini et telle que $\Delta v = 0$. On veut montrer que $v = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $R > 0$.
a) Montrer que la fonction $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon |x|^2$ n'a pas de maximum local.
b) En déduire que, pour tout $R > 0$, on a $\sup_{|x|\leq R} v_\varepsilon(x) = \sup_{|x|=R} v_\varepsilon(x)$
c) En déduire que $\sup_{|x|\leq R} v(x) = \sup_{|x|=R} v(x)$.
d) Conclure.

Exercice 6. Soit u_0 une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^N$. On note u la fonction sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^N$ donnée par $u(t,x) := (4\pi t)^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y)dy$.
a) Montrer que u est de classe C^∞.
b) Montrer que u est solution de l'équation de la chaleur $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = 0$.
c) Montrer que u satisfait les conditions initiales $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.
d) Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, montrer que $u_0 = \lim\limits_{t\to 0^+} u(t)$, la limite étant prise dans L^1.
e) Calculer $u(t)$ lorsque $u_0(x) = e^{-(x-c)^2/\gamma}$, $c, \gamma > 0$.

Exercice 7.
Exercice 7.3.5 du cours.

Exercice 8.
On veut résoudre l'équation des ondes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x) = 0 \ .$$

On cherche les solutions $f \in C^2$ qui satisfont aux conditions initiales

$$\begin{aligned} f(0,x) &= u(x) \\ \tfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) &= v(x) \end{aligned}$$

avec $u \in C^2, v \in C^1$ et u et v à support compact.

a) En prenant comme nouvelles variables $y = x + t, z = x - t$, montrer que l'on a

$$f(t,x) = \varphi_1(t+x) + \varphi_2(x-t)$$

où φ_1, φ_2 sont deux fonctions C^2.
b) En écrivant les conditions initiales, montrer que si u est à support compact et $v = 0$, on obtient une solution de la forme $f(t,x) = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$ où φ est à support compact.
c) Retrouver ce résultat (voir 7.3.6 du cours) en utilisant la transformation de Fourier et en résolvant explicitement (voir la notation $\tilde{f}$ dans le Chapitre 7 du cours)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^2\right) \tilde{f}(t,\xi) = 0 \ .$$

d) Si $u = 0$ et $v \neq 0$, montrer que

$$\tilde{f}(t,\xi) = \frac{\hat{v}(\xi)}{|\xi|} \sin |\xi| t \ .$$

En déduire que $f(t,x)$ est donnée pour $t>0$ par le produit de convolution

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}_{[-t,t]^*}v)(x).$$

Cette fonction est-elle à support compact en x ? Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)dx = 0$ on a $f(t,x) = 0$ si $|x-t| > R$ ou $|x+t| > R$, en supposant le support de v contenu dans $[-R,R]$. (Phénomène de propagation : le cas de la dimension 3 est traité dans la remarque 7.3.7 du cours).

Exercice 9.

Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^3$, $\Gamma^\star$ le réseau dual, C^0_Γ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^3$ continues et Γ-périodiques, C^2_Γ et C^∞_Γ le sous-espace formé des fonctions de classe C^2 et C^∞ respectivement. Pour f dans C^0_Γ, on note $(c_k(f))_{k\in\Gamma^\star}$ les coefficients de Fourier de f.
a) Montrer que f est dans C^∞_Γ si et seulement si on a $\forall r \geq 1 \quad \exists C > 0 \quad \forall k \in \Gamma^\star$ $|c_k(f)| \leq C\,(1+|k|)^{-r}$.
b) Montrer que les constantes sont les seules solutions u dans C^2_Γ de l'équation $\Delta u = 0$.
c) Soit f dans C^∞_Γ. Montrer que l'équation $\Delta u = f$ admet des solutions u dans C^2_Γ si et seulement si f est de moyenne nulle (i.e. $c_0(f) = 0$). Montrer qu'alors ces solutions sont de classe C^∞.

Exercice 10. On garde les notations de l'exercice 9. Soient f et g dans C^∞_Γ. Montrer qu'il existe une unique fonction $(t,x) \to u_t(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ telle que
i) $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ u_t \in C^2_\Gamma$,
ii) $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u = 0$,
iii) $u_t|_{t=0} = f\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g$.
Montrer que cette fonction u est de classe C^∞.

Exercice 11. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^2$, C^∞, périodique de période $\mathbb{Z}^2$. On écrit son développement de Fourier :

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} e^{2i\pi(mx+ny)}$$

a) Que peut-on dire des coefficients a_{mn} ? (Exercice 9)
b) On suppose que f vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

En déduire une relation sur les coefficients de Fourier de f.
c) Si α est irrationnel, montrer que f est *constante.*
d) Soit $\gamma(t) = (t, \alpha t)(t \in \mathbb{R})$. Si f vérifie (E), vérifier que f est constante sur la courbe γ. Si α est irrationnel montrer que $D + \mathbb{Z}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$ (D étant la droite image de γ) et en déduire une autre démonstration de c).