

Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 4 - 29 septembre et 6 octobre 2003
Transformation de Fourier et convolution

Convolution et transformation de Fourier dans L^1_{loc} et dans L^1

Exercice 1. Soit α et β deux nombres réels. Montrer l'existence et calculer la convolée $(e^{\alpha x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x)) \star (e^{\beta x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x))$

Exercice 2. Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} de classe C^1 bornées et de dérivées bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2 .

Exercice 3. Montrer que la convolée de deux fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^N)$ est encore radiale.

Exercice 4. En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'unité pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Soit $h_a(x) = \frac{2a}{x^2+a^2}$. En utilisant le calcul de $\mathcal{F}(h_a)$, calculer la convolée $h_a \star h_b$ et la transformée de Fourier $\mathcal{F}(h_a h_b)$.

Exercice 6. Pour $a > 0$, on note $f_a(x) = e^{-x} x^{a-1} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$.

a) Montrer que, pour $a > 0$, f_a est dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) On pose $\Gamma(a) = \|f_a\|_1$ et $g_a = \Gamma(a)^{-1} f_a$. Calculer \widehat{g}_1 .

c) Pour $a > 0$ et $b > 0$, on note $B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$. Démontrer la relation $g_a \star g_b = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} g_{a+b}$.

Retrouver la formule des compléments $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ et en déduire $g_a \star g_b = g_{a+b}$.

d) Calculer \widehat{g}_a pour $a > 0$ (*Indication : on commencera par le cas où a est rationnel.*)

Exercice 7. Espace de Schwartz et formule sommatoire de Poisson

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} est l'espace des fonctions f (dites à décroissance rapide) de classe C^∞ sur \mathbb{R} telles que, pour tout n et p entiers positifs, l'on ait $x^n f^{(p)}(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.

a) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par une fonction polynomiale,

b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même ;

c) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$ est convergente et que sa somme $\theta(x)$ est une fonction de classe C^∞ et 2π périodique.

Démontrer la formule de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

Transformation de Fourier dans L^2

Exercice 8. Calculer les transformées de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$:

$$x^{-1} \sin x \quad \text{et} \quad (x+i)^{-1}.$$

Exercice 9. Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, c'est à dire une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 telle que f et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions $(1 + x^2 + y^2)^{-k}$ avec $k > 0$. Montrer l'inégalité : $2 \|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\|_2 \leq \|(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) f\|_2$.

Exercice 11. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$. On note, pour tout x dans \mathbb{R}^N , f_x la fonction traduite : $y \rightarrow f_x(y) := f(y - x)$. Montrer que l'espace vectoriel $V := \text{Vect}(\{f_x / x \in \mathbb{R}^N\})$ engendré par les traduites de f est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^N / \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure nulle.

Indication : étudier l'orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $\mathcal{F}(V)$.

Convolution dans L^2

Exercice 12. On veut étendre la formule $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \widehat{f} \star \widehat{g}$ pour f, g dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ avec \widehat{f}, \widehat{g} dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ au cas où f, g sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

1) Soit $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) / \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$. Montrer que V est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et que V est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2) En déduire l'égalité $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \widehat{f} \star \widehat{g}$ pour f, g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 13. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ puis dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, l'équation $u \star u = u$.

Exercice 14. Soient A, B deux parties de \mathbb{R}^N de mesure non nulle. Montrer que l'ensemble $A + B := \{a + b / a \in A, b \in B\}$ contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^N .

Indication : On supposera que les mesures de A et B sont finies et on montrera que la fonction $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B$ est continue.

Exercice 15. Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$, on note $Pf(x) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin y}{y} dy$.

a) Montrer que la fonction Pf est bien définie et est continue.

b) Montrer, à l'aide des exercices 8 et 12, que Pf est dans $L^2(\mathbb{R})$ et calculer, pour g dans $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1} \circ P \circ \mathcal{F}(g)$.

c) En déduire que Pf est de classe C^∞ , que $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$ et que $P \circ P = P$.