Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 1 - 26 août 2002
Fonctions holomorphes.

Exercice 1. Soit $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$ et $c \in D$. Montrer que la fonction f définie par $f_c(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$ est holomorphe dans D et que c'est une bijection de D sur D. Indication : Calculer $1 - |f(z)|^2$, et calculer l'inverse de f.

Exercice 2. On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est harmonique si elle est de classe C^2 et si $\Delta f = 0$, en notant $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ l'opérateur appelé *Laplacien*.
i) En dimension 2, on introduit les opérateurs $\partial f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$. Montrer que $\Delta f = 4\partial \circ \overline{\partial} f = 4\overline{\partial} \circ \partial f$ pour toute fonction f de classe C^2. En déduire que toute fonction holomorphe est harmonique en tant que fonction de deux variables réelles, ainsi que ses parties réelles et imaginaires (D'après le corollaire 1.4.5, toute fonction holomorphe est de classe C^2 et même de classe C^∞).
ii) En supposant que Ω est un un ouvert étoilé, on veut montrer que, réciproquement, toute fonction harmonique $P(x, y)$ à valeurs réelles définie sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe. (C'est encore vrai si Ω est un ouvert simplement connexe).

Montrer que cela revient à trouver une fonction $Q(x, y)$ à valeurs réelles telle que $\partial Q/\partial x = -\partial P/\partial y$ et $\partial Q/\partial y = \partial P/\partial x$ c'est à dire $dQ = \omega$ en posant $\omega = -\partial P/\partial y dx + \partial P/\partial x dy$. Pour simplifier, on suppose que Ω est étoilé autour de $(0, 0)$. Soit (x, y) un point de Ω et γ le segment joignant $(0, 0)$ à (x, y). Montrer que la fonction définie par $Q(x, y) = \int_\gamma \omega$ est bien une primitive de la forme différentielle ω.
iii) Soit $P(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$ un polynôme harmonique. Montrer que $P(x, y)$ est la partie réelle du polynôme $f(z) = 2P(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - P(0, 0)$. Indication : on pourra commencer par vérifier cette assertion lorsque $P(x, y) = \Re(z^n)$ et $P(x, y) = \Im(z^n)$.
iv) Montrer que la fonction $\ln |z|$ sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est harmonique. En utilisant

par exemple le logarithme complexe, (section 1.8 du cours), montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe, définie sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, admettant $\ln |z|$ comme partie réelle.

Exercice 3.
i)Soient f et g holomorphes dans un ouvert de $\mathbf{C}$. On rappelle que leurs dérivées f' et g' sont holomorphes elles-aussi. Etablir la relation

$$\overline{\partial} \circ \partial (f\overline{g}) = f'\overline{g}'.$$

ii) Soient $f_1, \ldots, f_n$ holomorphes dans un ouvert connexe, telles que $\sum |f_j|^2$ soit constant. Montrer que chaque fonction f_j est constante.

Exercice 4. (Autre méthode). Montrer qu'une fonction holomorphe et de module constant dans un ouvert connexe de $\mathbf{R}^2$ est elle même constante, en écrivant $\overline{f(z)} = C/f(z)$.

Exercice 5. Pour $a, b \in \mathbf{R}$ soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ défini par $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$. Calculer $\int_\gamma |z|^2 dz$.

Exercice 6.

i) Soient a, b deux nombres strictement positifs, γ_1 le segment d'extrémités $(a, 0)$ et (a, b), γ_2 celui d'extrémités $(-a, b)$ et $(-a, 0)$. Montrer que les intégrales $\int_{\gamma_1} e^{-z^2/2} dz$ et $\int_{\gamma_2} e^{-z^2/2} dz$ tendent vers 0 lorsque $a \to \infty$.
ii) Montrer que la fonction $e^{-z^2/2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.
iii) Soit P le rectangle de sommets $(a, 0)$, (a, b), $(-a, b)$, $(-a, 0)$, γ le bord orienté de P. Que vaut l'intégrale $\int_\gamma e^{-z^2/2} dz$? Indication : Corollaire 1.3.3.
iv) Déduire de ce qui précède la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-u^2/2}$$

Exercice 7. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.
i) En utilisant la formule de Cauchy, calculer

$$I(R) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

où $|a| \leq |b| < R$, $a \neq b$ et $\gamma =: \{z \in \mathbf{C}, |z| = R\}$.
ii) On suppose que f est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$. En déduire que f est constante. C'est le théorème de Liouville, dont l'exercice 1.4.13 donne une autre démonstration.
iii)A l'aide du théorème de Liouville, démontrer le théorème de d'Alembert (1.4.15).

Exercice 8.
i) *La formule de Cauchy implique l'holomorphie*
Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\bar{D}(z_0, r) \subset \mathbf{C}$ et telle qu'on ait, pour tout z dans le disque ouvert,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

en notant γ le cercle orienté de centre z_0 et de rayon r. Montrer que f est holomorphe dans le disque ouvert. Indication : dériver sous l'intégrale.
ii) *convergence uniforme sur tout compact*
Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Montrer que f est holomorphe dans Ω.
Indication : Passer à la limite dans la formule intégrale de Cauchy, théorème 1.4.1.
iii) Qu'en est-il pour les suites de fonctions dérivables dans un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{R}^2$?

Exercice 9. *Propriété de la moyenne et principe du maximum*
i) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω contenant le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. Démontrer la *propriété de la moyenne* :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

ii) Montrer que toute fonction harmonique réelle sur Ω a la propriété de la moyenne.
iii) Soit $u : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un ouvert de $\mathbf{C}$. $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que u a la propriété de la moyenne et atteint son maximum en un point z_0 de Ω. Montrer que u est constante dans tout disque fermé de centre z_0 contenu dans Ω. Indication : étudier le signe de $\int_0^{2\pi} (u(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0)) d\theta$. En déduire que si Ω est connexe (donc connexe par arcs) la fonction u est

constante dans Ω. On pourra admettre le résultat suivant : Soit $z \in \Omega$. Il existe une suite finie de disques fermés $D(z_j, r)$, $0 \leq j \leq n$, avec $z_n = z$, qui soient tous contenus dans Ω , et tels que $z_j \in D(z_{j-1}, r)$. [Cela se démontre en introduisant un chemin γ contenu dans Ω allant de z_0 à z, et en utilisant la *continuité uniforme* de ce chemin.]

Exercice 10. *Principe du maximum du module*

Soit f fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. En adaptant le raisonnement de l'exercice précédent, montrer que si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante dans un voisinage de z_0. [Si Ω est connexe par arcs, l'unicité du prolongement analytique entraine que f est en fait constante sur Ω tout entier.]

Exercice 11. Soit f une fonction à valeurs complexes, continue sur le disque fermé $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(z_0, r)$. Montrer que $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ est atteint sur le bord de D.

Exercice 12. *Lemme de Schwarz*[1]. Soit f une fonction holomorphe sur $D = D(0, 1)$. Supposons que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour $z \in D$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. On appliquera le principe du maximum à $\frac{f(z)}{z}$.

Exercice 13. *Caractérisation des bijections bi-holomorphes du disque dans lui-même : une application du Lemme de Schwarz* . On se propose de montrer que toute bijection : $D = D(0, 1) \to D$ holomorphe ainsi que son inverse est l'une des fonctions homographiques $f_c(\lambda z) = \frac{\lambda z + c}{1 + \overline{c} \lambda z}$, où $c \in D$ et $|\lambda| = 1$.
i) Commencer par le cas où $f(0) = 0$. Montrer que $|f'(0)| = 1$, en utilisant le Lemme de Schwarz et la bijectivité de f . Montrer ensuite en utilisant le principe du maximum que $f(z) = \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$.
ii) Si $f(z) \neq 0$, se ramener au cas précédent, en utilisant les fonctions introduites dans l'exercice 1.

Les deux exercices qui suivent sont des applications de la formule intégrale pour les dérivées, (théorème 1.4.3)

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbf{C}$, $|a| \leq 1 \leq |b|$, et m, n deux entiers positifs.

[1] Hermann Amandus Schwarz , 1843-1921, mathématicien allemand qui succéda en 1892 a Weierstrass à Berlin

Calculer

$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n}.$$

Exercice 15.
i) Soit f une fonction continue sur $\overline{D}(a,r)$ et holomorphe dans $D(a,r)$. Etablir, pour tout n, la majoration

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{\sup|f|}{r^n}.$$

ii) Montrer que si une suite (f_k) de fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction f, alors la suite des dérivées f_k' converge vers f' uniformément sur les compacts de Ω.