Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
vendredi 23 septembre 2005 – durée 1 heure

Exercice 1. Calculer l'intégrale de contour

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 3\exp(z)}{z^2(z-4)} dz$$

où le chemin fermé $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est décrit par la formule $\gamma(t) = \exp(it)$.

Exercice 2. Déterminer les singularités isolées de la fonction

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2}$$

et calculer les résidus correspondants.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert contenant le disque fermé de rayon 1 centré en 0 et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Démontrer que

$$f(r\exp(i\phi)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\exp(i\theta))}{1 - r\exp(i(\phi - \theta))} d\theta$$

où r est un nombre réel tel que $0 \leq r < 1$.

Exercice 4. Déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge vers $\exp(x)$ dans $L^2([0, \pi])$.

Exercice 5. (subsidiaire)
Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$ telle que la partie réelle $\Re(f)$ de f soit un polynôme en les variables $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$. Démontrer que $f(z)$ est un polynôme en z.