Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
Interrogation du 24 septembre 2004

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que $|a_d| > 2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{d-1}|$. Montrer que, pour $|z| = 1$,

$$|P(z)| \geq |a_d| - (|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|).$$

En utilisant le principe du maximum, en déduire que P admet un zéro dans le disque unité.

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Exercice 3. Calculer les coefficients a_n tels que

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) \quad \text{dans} \quad L^2(0,\pi).$$

Exercice 4. Déterminer les pôles et les résidus de la fonction

$$f(z) = \frac{z^{\frac{7}{4}}}{(z^2 + 1)^2}$$

où $z^{\frac{7}{4}}$ est définie à partir de la détermination principale $\ell(z)$ du logarithme. On donnera les résidus sous la forme $\rho e^{i\theta}$.