

**Mathématiques MAT 432**  
**Analyse de Fourier et théorie spectrale**  
**lundi 22 septembre 2003 – durée 1 heure**

**Exercice 1.** Soit  $a > 0$  un nombre réel donné. Calculer pour tout  $t \in \mathbb{R}$  l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-i)(x-ia)} dx.$$

**Exercice 2.** On considère  $z^{\frac{5}{2}}$  définie à partir de la détermination principale  $\ell(z)$  du logarithme ( $z^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}\ell(z)}$ ). On définit la fonction

$$f(z) = \frac{z^{\frac{5}{2}}}{z^2 + 1}$$

sur  $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} | z \leq 0\}$ . Déterminer ses pôles et ses résidus. On donnera les résidus sous la forme  $\rho e^{i\theta}$ .

**Exercice 3.** Calculer les coefficients  $a_n$  tels que

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \quad \text{dans } L^2(0, \pi).$$

**Exercice 4.** Trouver toutes les fonctions holomorphes dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$