MAT432 : Contrôle Classant du 14 Novembre 2002

Faire parfaitement deux des problèmes assurera une bonne note. Le 1er problème est le plus difficile donc celui qui rapporte le plus de points. Une copie où un des problèmes est traité à fond aura une meilleure note qu'une copie qui ne traite que les questions les plus faciles de chaque problème. Les références au cours sont admises, mais devront être précises

Problème I : un calcul de π

1) Posons, pour $z \in \mathbf{C}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Montrer que cela définit une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbf{C}$. Calculer $\sin(z)$ en fonction de $\sin(x), \cos(x), \mathrm{ch}(y)$ et $\mathrm{sh}(y)$ $(z = x + iy)$.
2) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C(\epsilon) > 0$ tel que

$$|z - n\pi| \geq \epsilon \Rightarrow |\sin(z)| \geq C(\epsilon)e^{|y|}$$

On rappelle qu'une fonction holomorphe h sur un disque pointé autour d'un point z a un pôle simple en z si son développement de Laurent (théorème 1.5.1) s'écrit

$$h(w) = \frac{a_{-1}}{(w-z)} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (w-z)^k$$

3) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit h une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, où les points z_j sont deux

à deux distincts. On suppose que h n'a que des pôles simples en les points z_j.

Soit D_r un disque ouvert dont la fermeture (le disque fermé) est incluse dans Ω et soit γ_r son bord orienté, qui est un cercle; on suppose qu'aucun des z_j n'appartient à γ_r. Montrer que, pour $z \in D_r$ et $z \neq z_j$ pour tout j,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{h(w)}{(w-z)^2}dw = h'(z) + \sum_{z_j \in D_r}\frac{\mathrm{Res}(h; z_j)}{(z_j - z)^2}$$

(On appliquera le théorème des résidus.)

4) Soit f une fonction holomorphe entière. On suppose que f vérifie, $|f(z)| \leq e^{|y|}$ pour tout $z = x + iy \in \mathbf{C}$. On suppose également $z \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_p}\frac{f(w)}{\sin(w)}\frac{dw}{(w-z)^2}$$

où γ_p est le chemin $t \mapsto \pi(p+\frac{1}{2})e^{it}$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$ et $p > 0$ et où z appartient au disque ouvert D_p bordé par γ_p.

5) Soit K un compact de $\mathbf{C} \setminus \{n\pi\}$ $(n \in \mathbf{Z})$. Montrer que la série $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}$ est normalement convergente sur K (on pourra utiliser un majorant de $|z|$ pour $z \in K$). On admettra que cette série définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{n\pi\}$

6) Déduire de ce qui précède l'égalité suivante, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{n\pi\}$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\sin(z)}\right) = -\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}$$

7) Démontrer l'égalité suivante, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{n\pi\}$:

$$\frac{1}{(\sin(z))^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

8) Démontrer que $\frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{1}{z^2}$ et $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2} - \frac{1}{z^2}$ sont holomorphes au voisinage de 0.
9) Utiliser ce qui précède pour calculer

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Problème II : le théorème de Paley-Wiener

1) Soit f une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$, que peut-on dire de sa transformée de Fourier?
2) On suppose que f est à support dans l'intervalle $[-R, R]$ (c'est-à-dire, est nulle hors de cet intervalle), montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ il existe une constante $D_p > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbf{C}$ on ait :

$$|\xi|^p |\widehat{f}(\xi)| \leq D_p e^{R|Im\xi|}$$

($Im\xi$ est la partie imaginaire du nombre complexe ξ)
3) En déduire que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbf{C}$,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_N e^{R|Im\xi|}}{(1+|\xi|)^N}$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer la réciproque.

Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie que, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$

telle que, pour tout $\xi \in \mathbf{C}$,

$$|g(\xi)| \leq \frac{C_N e^{R|Im\xi|}}{(1+|\xi|)^N}.$$

4) On pose

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ixu} g(u) du$$

Montrer que f est bien définie et est de classe C^∞.
5) Pour $v \in \mathbf{R}$ fixé, prouver que

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} e^{ix(u+iv)} g(u+iv) du$$

(On utilisera le théorème de Cauchy sur de grands rectangles).
6) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour N assez grand, et pour tout $v \in \mathbf{R}$,

$$|f(x)| \leq e^{R|v|-xv} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \frac{C_N}{(1+|u|)^N} du$$

7) Prouver que $f(x) = 0$ dès que $|x| > R$. Montrer que $g = \widehat{f}$.
8) Énoncer le théorème démontré dans ce problème.

Problème III : régularité elliptique

***Dans tout ce problème* $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$.**

On dit que f appartient à **l'espace de Sobolev** W_m pour $m \geq 0$ si,

$$\int_{\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^m |\widehat{f}(x)|^2 dx < \infty$$

1) Montrer que si f est de classe C^k et à support compact, alors $f \in W_k$. Vérifier que $W_m \subset W_p$ si $p \leq m$.
2) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $(1+|x|^2)^{-(n/4)-\epsilon} \in L^2(\mathbf{R}^n)$.
3) Soit $f \in W_m$, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(1+|x|^2)^{(m/2)-(n/4)-\epsilon}\widehat{f}(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$$

puis que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$|\widehat{f}(x)| \leq (1+|x|^2)^{-(m/2)+(n/4)+\epsilon} g_\epsilon(x)$$

où $g_\epsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$.
4) On suppose alors que $f \in W_m$ avec $m > \frac{n}{2}$. Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et en déduire que f est presque partout égale à une fonction continue (*on choisira ϵ de manière adéquate*). Par abus de langage on dira que f est continue.
5) On suppose maintenant que $f \in W_m$ avec $m > \frac{n}{2} + k$. Montrer, en utilisant la même méthode que précédemment que $|x|^l|\widehat{f}(x)|$ est sommable dès que $l \leq k$. En déduire que f est de classe C^k (on fait le même abus de langage).
6) Soit $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ une fonction, que l'on suppose de plus de classe C^2, et telle que $\Delta u = f$. Montrer que

$$u \text{ et } f \in W_m \Longrightarrow u \in W_{m+2}\,.$$

7) On considère maintenant l'équation $\Delta u = f$, où f est de classe C^k et à support compact et $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ est supposée de plus de classe C^2 (cette hypothèse n'est là qu'afin que l'équation ait un sens).
Montrer que $u \in W_{k+2}$ (on rappelle que $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$).
8) Montrer que, sous les mêmes hypothèses, si f est de classe C^∞ et à support compact, alors u est de classe C^∞.