## MAT432 : Contrôle Classant

## du 4 Novembre 2004

*Une copie où un des problèmes ou exercices est traité à fond aura une meilleure note qu'une copie qui ne traite que les questions les plus faciles de chaque problème ou exercice. Les références au cours sont admises, mais devront être précises*

**Exercice I :** Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on suppose que $n > \alpha + 1 > 0$. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n} dx$$

On utilisera le contour suivant : pour $0 < r < R$ deux nombres réels, le segment de l'axe réel [r,R], les arcs de cercle $t \mapsto re^{it}$ et $t \mapsto Re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi/n]$ et le segment $t \mapsto te^{\frac{2i\pi}{n}}$ pour $t \in [r, R]$.

**Exercice II :** On pose $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x)}{x}$. Calculer, en justifiant tous les calculs, la convolée de $f$ avec elle-même, c'est-à-dire $f * f$. Ensuite calculer $f * f * f$.

### Problème I : le théorème de Rouché.

On rappelle que $D(a, r)$ désigne le disque ouvert de centre $a \in \mathbf{C}$ et de rayon $r$, c'est-à-dire $\{z \in \mathbf{C} / |z - a| < r\}$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ une courbe fermée ($\gamma(0) = \gamma(1)$) continue et $C^1$ par morceaux. On suppose que, pour tout $s \in [0, 1]\,, \gamma(s) \neq 0$. On définit l'indice de 0 par rapport à $\gamma$ par :

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{dz}{z}\,.$$

On admettra le résultat qui suit; si $\gamma_t : [0,1] \to \mathbf{C}$ est une famille de courbes fermées dépendant continûment de $t \in [0,1]$, c'est-à -dire telle que l'application $(t,s) \mapsto \gamma_t(s)$ est continue, et si, pour tout $(t,s) \in [0,1]^2$ , $\gamma_t(s) \neq 0$, alors on a :

$$\mathrm{ind}_{\gamma_0}(0) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(0)\,.$$

1) Soit $\gamma$ une courbe constante, c'est-à-dire telle que $\gamma(s) = a \neq 0$ pour tout $s \in [0,1]$, montrer que $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 0$.
2) Soit $\gamma$ une courbe fermée contenue dans $D(1,1)$, montrer que $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 0$.
3) Soit $\Omega$ un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,1)} = \{|z| \leq 1\}$. On note $\mathcal{C}$ le cercle unité centré en l'origine. Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ qui n'a pas de zéro sur $\mathcal{C}$, montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ est égal au nombre de zéros de $f$ dans $D(0,1)$, chacun compté avec sa multiplicité (son ordre).
4) Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $\Omega$. On suppose que, pour tout $z \in \mathcal{C}$, on a :

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|\,.$$

On pose $h = f/g$ et on définit la courbe

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbf{C} \\ s &\longmapsto h(e^{2i\pi s}) \end{aligned}$$

montrer que $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 0$.
5) En déduire le calcul de $\int_{\mathcal{C}} \frac{h'(z)}{h(z)}dz$.
6) Montrer que $f$ et $g$ ont même nombre de zéros, comptés leur avec multiplicité, dans $D(0,1)$.
*Commentaire : c'est le théorème de Rouché*

7) Application : soient $b \in D(0,1)$ et $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs, montrer que l'équation

$$z^m \Big(\frac{2z-1}{2-z}\Big)^n - b = 0$$

possède $m+n$ solutions appartenant à $D(0,1)$.
*indication : on considèrera* $f(z) = z^m \big(\frac{2z-1}{2-z}\big)^n$ *et* $g(z) = f(z) - b$.

## Problème II : le spectre de l'oscillateur harmonique.

Soit $\mathcal{E}$ un espace préhilbertien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire mais non nécessairement complet, voir le début du chapitre 4 du polycopié). Nous appellerons opérateur une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans lui-même non nécessairement continue pour la topologie définie par le produit scalaire.
Soient $P$ et $Q$ deux opérateurs autoadjoints tels que :

$$[P, Q] \stackrel{\text{déf}}{=} PQ - QP = -iI \,,$$

où $I$ désigne l'identité de $\mathcal{E}$. L'opérateur $[P, Q]$, défini par la formule ci-dessus, s'appelle le commutateur de $P$ et $Q$. On définit :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ), \qquad \text{et } H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)\,.$$

1) Montrer que $H$ est autoadjoint et que ses valeurs propres, si elles existent, sont positives ou nulles.
2) Calculer $A^\dagger$ en fonction de $P$ et $Q$.
3) Exprimer $H$ en fonction de $AA^\dagger$ puis de $A^\dagger A$.
4) Calculer $[A^\dagger, A]$.

**On suppose maintenant que $H$ a des valeurs propres.**

5) Soit $u$ un vecteur propre (non nul) relatif à la valeur propre $\lambda$ de $H$, montrer que :

$$\|Au\|^2 = (\lambda - \frac{1}{2})\|u\|^2 \text{ et } \|A^\dagger u\|^2 = (\lambda + \frac{1}{2})\|u\|^2 .$$

6) Montrer que l'on a :

- soit $\lambda = \frac{1}{2}$ et $Au = 0$.
- soit $\lambda > \frac{1}{2}$ et $Au$ est vecteur propre de $H$. Quelle est la valeur propre associée? même question pour $A^\dagger u$.

7) Montrer que les valeurs propres de $H$ sont de la forme $\lambda = n + \frac{1}{2}$, où $n$ est un entier positif ou nul.

8) On note $E_{n+\frac{1}{2}}$ l'espace propre de $H$ associé à la valeur propre $n + \frac{1}{2}$. Montrer que $A^\dagger$ réalise un isomorphisme de $E_{n-\frac{1}{2}}$ sur $E_{n+\frac{1}{2}}$.

9) En déduire que, si $H$ a au moins une valeur propre, ces espaces sont non réduits à $\{0\}$ et se calculent à l'aide du noyau de $A$ et de l'opérateur $A^\dagger$.

*Commentaire : les physiciens disent que A est un opérateur d'annihilation et $A^\dagger$ est un opérateur de création.*

**Application : on prendra maintenant pour $\mathcal{E}$ l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(R)$ des fonctions à décroissance rapide muni du produit scalaire habituel :**

$$< f, g >= \int_R \overline{f} g \, .$$

10) On pose, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$P(f)(x) = xf(x) \text{ et } Q(f)(x) = i\frac{df}{dx}(x) \, .$$

Montrer que $Pf$ et $Qf$ sont des fonctions à décroissance rapide et que $P$ et $Q$ sont des opérateurs autoadjoints.
11) Montrer, en utilisant ce qui précède, que les fonctions propres de l'oscillateur harmonique $\frac{1}{2}\big(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\big)$, s'écrivent $H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où les $H_n$ sont des polynômes de degré $n$. En déduire que, si $n \neq m$,

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0\,.$$

*Commentaire : à une constante près les polynômes* $H_n$ *sont les polynômes d'Hermite et les fonctions propres de l'oscillateur harmonique sont les fonctions d'Hermite.*