MAT432 : Contrôle Classant du 13 Novembre 2003

Une copie où un des problèmes ou exercices est traité à fond aura une meilleure note qu'une copie qui ne traite que les questions les plus faciles de chaque problème ou exercice. Les références au cours sont admises, mais devront être précises

Exercice I : Montrer la convergence et calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(1+x)^4} dx.$$

Exercice II : On note Γ le réseau $\mathbf{Z}^2$ de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction de L^2_Γ (avec les notations du livre). On écrit son développement de Fourier sous la forme :

$$f(x,y) = \sum_{(m,n)\in \mathbf{Z}^2} a_{mn} e^{2i\pi(mx+ny)}.$$

1) Montrer que la série $\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m^2+n^2)^2}$ converge.
2) En déduire que, si $\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}(m^2+n^2)^2|a_{mn}|^2 < +\infty$, alors f est continue (*indication : on adaptera une preuve faite en cours dans le cas unidimensionnel*).

Exercice III : On considère l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbf{R})$ par :

$$f \in L^2(\mathbf{R}), \qquad A(f) = af$$

où a est la fonction définie par $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
1) Montrer que A est un opérateur continue auto-adjoint.

2) Montrer que A n'a aucune valeur propre.
3) Montrer que $A-\lambda$ est inversible pour λ réel, $\lambda \notin [0,1]$.
4) Montrer que, si $0 < \lambda \leq 1$, l'opérateur $A-\lambda$ n'est pas surjectif (*on pourra considérer x_0 tel que $\lambda = \frac{1}{1+x_0^2}$*).
5) Déterminer le spectre de A.
Pour simplifier les notations nous poserons $\mathcal{F}_1 = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}_1 = (2\pi)^{-1/2}\overline{\mathcal{F}}$.
6) Pour $f \in L^2(\mathbf{R})$, on pose

$$R(f) = \overline{\mathcal{F}}_1(a\mathcal{F}_1(f)).$$

Montrer que R est un opérateur continue.
7) Déterminer le spectre de R.
8) On suppose que $f \in C^2$ et que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont de carré sommable, calculer $R((I+\Delta)(f))$, où I est l'identité de $L^2(\mathbf{R})$ et $\Delta(f) = -\frac{d^2f}{dx^2}$.

Problème I : la fonction Gamma.

1) Pour $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$ fixé, quel est le domaine d'holomorphie de la fonction $z \longmapsto t^z$?
2) Pour z fixé on considère la fonction, de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$:

$$t \longmapsto e^{-t}t^{z-1}.$$

Montrer que cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$, dès que $\mathcal{R}e(z) > 0$.

On pose alors

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

3) Montrer que la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\mathcal{R}e(z) > 0$. (*On appliquera un théorème du cours en vérifiant les hypothèses*).
4) Pour x réel strictement positif, montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

5) En déduire que, pour $\mathcal{R}e(z) > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
6) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(\frac{1}{2})$ puis $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n+\frac{1}{2})$, pour n entier strictement positif.
7) On pose,

$$f(n,z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}$$

pour n entier. Quel est le domaine d'holomorphie de $f(n,z)$?
8) Montrer que $f(n+p,z) = f(n,z)$ pour tout n, p entiers positifs et pour z assez grand.
9) Montrer que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{-\mathbf{N}\}$ (c'est-à-dire, sur $\mathbf{C}$ privé des entiers négatifs ou nuls).

Problème II : l'inégalité isopérimétrique.

Soit D un compact connexe par arc de $\mathbf{C}$. On suppose que son bord orienté est constitué d'une seule courbe de classe C^1, notée $\mathcal{C}$. On note L la longueur de $\mathcal{C}$ et A l'aire de D. On suppose la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par une fonction 2π-périodique,

$$\begin{aligned} z : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbf{C} \\ s &\longmapsto z(s) \end{aligned}$$

1) Posons $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$. Exprimer l'intégrale curviligne, $\int_{\mathcal{C}} \omega$, en fonction de A.
2) On note c_n le n-ième coefficient de Fourier de la fonction périodique z. Quel est le sens de l'égalité :

$$z(s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{ins}?$$

3) Calculer les coefficients de Fourier de la dérivée z' de z (en justifiant leur existence).
4) Calculer A en fonction du produit scalaire $(z|z')$ (produit scalaire dans $L^2([-\pi, \pi])$). *On utilisera la question 1.*
5) Donner, en la justifiant, une expression de A en fonction des c_n.
On suppose maintenant que la courbe $\mathcal{C}$, paramétrée par l'intervalle $[-\pi, \pi]$, est parcourue à vitesse constante.
6) Exprimer cette vitesse en fonction de L.
7) Exprimer le carré de la longueur en fonction des c_n. (*indication : on calculera $\int_{-\pi}^{\pi} |z'(s)|^2 ds$ de deux manières différentes*).
8) En utilisant les questions 5 et 7, démontrer l'inégalité isopérimétrique $L^2 \geq 4\pi A$.
9) Quels sont les coefficients de Fourier des courbes C^1 qui réalisent l'égalité? Décrire ces courbes.