RAPPELS

A continu

$A : L^2(R) \to C_b(R)$ **vérifiant (α) (linéarité), (β) (homogénéité dans le temps), et (γ) (causalité).**

Alors il existe $a \in L^2(\mathrm{R})$ **et nulle pour** $t < 0$ **t.q.**

$$\forall f, \quad Af = a \star f$$

$u(t,x)$	$\longrightarrow$	$\tilde{u}(t,\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(t,x)dx$
$\frac{\partial}{\partial x_j} u(t,x)$	$\longrightarrow$	$i\xi_j \tilde{u}(t,\xi)$
$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$	$\longrightarrow$	$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(t,\xi)$
EDP à coeff. constants	$\longrightarrow$	**Eq. différentielle en t à coeff. dépendant de ξ**
$u(0,x) = \phi(x)$	$\longrightarrow$	$\tilde{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$

Éq. de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \quad (5)$$

où Δ est le Laplacien en $x \in \mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

Problème de Cauchy : trouver u définie sur $[0, \infty[\times \mathbf{R}^n$ solution de (5) telle que $u(0,x) = u_0(x)$ donnée.

$\boxed{f = 0}$

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) d\xi \,,$$

$$u_t = G_t \star u_0, \quad \widehat{G_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2},$$

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$$

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy$$

$\boxed{f \neq 0}$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |\xi|^2 \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{u}(t, \xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-t|\xi|^2} + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \tilde{f}(s, \xi) d\xi$$

$$u(t, x) = (G_t \star u_0)(x) + \int_0^t (G_{t-s} \star f_s)(x) ds$$

Équation de Schrödinger libre

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\Delta u(t,x)=0$$

Pb. de Cauchy dans $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$ **:**
$u(0,x)=u_0(x)\in L^2(\mathbf{R}^n)$.

$$\tilde{u}(t,\xi)=\widehat{u_0}(\xi)e^{-it|\xi|^2}$$

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}_x}\Big(\tilde{u}(t,\cdot)\Big)\,,$$

On a $\|u(t,\cdot)\|_2=\|u_0\|_2$ **.**

Équation des ondes. – Chercher $u(t,x)$ sur $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$ t.q.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0\,,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)\,.$$

$$\tilde{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(|\xi|t) + \frac{\widehat{u_1}(\xi)}{|\xi|}\sin(|\xi|t)\,,$$

$$u = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}_x}(\tilde{u})$$

TH. et DEF. (adjoint d'un opérateur)

H **Hilbert,** A **linéaire** $H \to H$

Il existe un et un seul opérateur linéaire continu $A^\dagger$ **t.q.**

$$(f|Ag) = (A^\dagger f|g)$$

Notations de Dirac : Au **se note aussi** $|Au\rangle$ **ou** $|A|u\rangle$

$\langle f|A|$ **désigne la forme linéaire** $u \to \langle f|Au\rangle$**, c'est-à-dire** $\langle A^\dagger f|$ **.**

DEF. – A est **autoadjoint** (ou hermitien) si on a
$A^\dagger = A$. On a alors $(Af|g) = (f|Ag)$.

TH. & DEF. U est **isométrique**
si $(Uf|Ug) = (f|g)$.
U est **unitaire** si de plus U est inversible.

U isométrique $\iff U^\dagger U = I$
U unitaire $\iff U^\dagger U = UU^\dagger = I$.

DEF. – H **Hilbert,** $A : H \to H$

$$\text{spectre de } A = \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda \text{ non bijectif}\}$$

$$\text{spectre ponctuel de } A = \{\text{des valeurs propres}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda \text{ non injectif}\}$$

TH. – **Si** A **est autoadjoint,** **spectre**$(A) \subset \mathbb{R}$**. De plus, si** f_1 **et** f_2 **sont des vecteurs propres relatifs à deux valeurs propres distinctes,** $f_1 \perp f_2$**.**