RAPPELS

Transformée de Fourier dans L^1 :

$$f \in L^1(\mathbf{R}^n) \qquad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx$$

Formule d'inversion de Fourier :

$$f \in L^1 \text{ et } \widehat{f} \in L^1 \qquad f \overset{p.p}{=} (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$$

où

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(\zeta) = \int e^{i\zeta\cdot y} g(y)dy$$

Lemme. – On suppose f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ sommables. Alors f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ appartiennent à L^2 et

$$\left(\widehat{f}\middle|\widehat{g}\right) = (2\pi)^n (f|g) \ ; \qquad \left\|\widehat{f}\right\|_2 = (2\pi)^{(n/2)} \|f\|_2 \qquad (*)$$

Lemme. – On suppose f et g dans $L^1 \bigcap L^2$. Alors $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ appartiennent à L^2 et mêmes égalités $(*)$.

TH. & DEF. (Transformation de Fourier dans L^2)
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Pour toute suite $f_j \in L^1 \bigcap L^2$ telle que la suite $f_j \to f$ dans L^2, la suite $\widehat{f_j}$ converge dans L^2 vers une fonction (notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$) qui ne dépend pas de la suite choisie.

L'application $f \mapsto (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}f$ est linéaire, bijective, isométrique de L^2 sur lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$.

TH. (calcul pratique de $\widehat{f}$ pour $f \in L^2$)

Soit $f \in L^2$. On suppose que

$$\int_{|x| \leq R} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \phi(\xi) \text{ p.p.}$$

Alors,

$$\widehat{f}(\xi) = \phi(\xi) \text{ p.p.}$$

Extension à L^2 des propriétés de $\mathcal{F}$

- f **de classe** C^1**;** f **et les** $\partial f/\partial x_j$ **dans** L^2

Alors $\quad \mathcal{F}(\partial f/\partial x_j) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$

- $f \in L^1$ **et** $g \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(f \star g) = \widehat{f}\widehat{g}$

- f **et** $g \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-n} \widehat{f} \star \widehat{g}$

Principe d'incertitude

$f \in L^2(\mathbf{R})$; $\|f\|_2 = 1$,
$|f(x)|^2$: **loi de probabilité;**
moyenne : $m_f = \int x|f(x)|^2 dx$,
variance : $V_f = \int (x - m_f)^2 |f(x)|^2 dx$,
écart-type : $\sigma_f = \sqrt{V_f}$

$$g = (2\pi)^{-1/2} \widehat{f} \quad ; \quad \|g\|_2 = 1 \quad m_g, V_g, \sigma_g.$$

TH. – **On suppose de plus que** f **est de classe** C^1 **et que** f' **et** $x \mapsto xf(x)$ **sont dans** L^2**. Alors,**

$$\sigma_f \sigma_g \geq 1/2$$

avec égalité ssi f **est une gaussienne.**

Fonctions de la distance à l'origine.

$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$; **Si** $f(x) = F(r) \quad (r = |x|)$, **alors** $\widehat{f}(\xi) = \Phi(\rho) \quad (\rho = |\xi|)$.

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(\rho r) F(r) dr & \textbf{pour } n = 1 \\ \\ 2\pi \int_0^\infty r J_0(r) F(r) dr & \textbf{pour } n = 2 \\ \\ \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty r \sin(\rho r) F(r) dr & \textbf{pour } n = 3 \end{cases}$$

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos\theta) d\theta$$