Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
Correction du contrôle du 23 sept. 2002

Exercice 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $f(z) = \frac{e^{izt}}{(z-2i)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Elle possède un pôle double au point $z_0 = 2i$. Le résidu de f en ce point est $\mathrm{Res}(f, 2i) = (e^{izt})'_{|z=2i} = ite^{-2t}$. Soit $R > 2$.

Si $t \geq 0$: Considérons le contour formé du segment $\gamma_0 = [-R, R]$ de la droite réelle et du demi cercle γ_R dans le demi plan positif paramétré par $z = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Le théorème des résidus donne donc

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f, 2i) = -2\pi te^{-2t}.$$

On a $\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta$ et $\mid f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} \mid\leq \frac{e^{-Rt\sin\theta}R}{(R-2)^2}$. Comme $t \geq 0$ et $\sin\theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$, on obtient $\mid f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} \mid\leq \frac{R}{(R-2)^2}$ et donc $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ (ou alors appliquer directement le Lemme 1.6.4 du cours). Pour $t \geq 0$, on a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-2i)^2}dx = -2\pi te^{-2t}$.

Si $t < 0$: Considérons cette fois le contour formé du segment $\gamma_0 = [-R, R]$ de la droite réelle (parcouru de R à $-R$ et du demi cercle γ'_R dans le demi plan négatif paramétré par $z = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [-\pi, 0]$. La fonction f n'a pas de pôles dans le demi-plan négatif et donc le théorème des résidus donne

$$\int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma'_R} f(z)dz = 0$$

On a $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Par suite, l'intégrale cherchée est nulle pour $t < 0$.

Exercice 2. La fonction $f(z) = \frac{e^{\frac{2}{3}l(z)}}{z^2+1}$ possède deux pôles simples i et $-i$. On a

$$Res(f, i) = \frac{e^{\frac{2}{3}l(i)}}{2i} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad Res(f, -i) = \frac{e^{\frac{2}{3}l(-i)}}{-2i} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Exercice 3. Il s'agit du développement en demi-période en cosinus de la fonction $\mathbf{1}_{[0,\frac{2\pi}{3}]}$. On a $a_0 = \frac{4}{3}$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

D'où

$$\mathbf{1}_{[0,\frac{2\pi}{3}]} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((3p+1)x)}{3p+1} - \frac{\cos((3p+2)x)}{3p+2}.$$

Par la formule de Bessel-Parceval, on obtient:

$$\frac{4\pi^2}{27} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(3p+1)^2} + \frac{1}{(3p+2)^2}.$$

Exercice 4. Soit $h = f - g$ holomorphe. Comme $f + \overline{g} \in \mathbb{R}$, on a $f + \overline{g} = \overline{f} + g$. Donc $2i\,\mathrm{Im}(h) = h - \overline{h} = f - g - \overline{f} + \overline{g} = 0$. Donc, h holomorphe et de partie imaginaire nulle est constante, et réelle: il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $h(z) = c$.