Corrigé de l'interrogation hors classement du 23 septembre 2005 [cours MAT432 à l'école polytechnique]

Exercice 1.

On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z^2+3e^z}{z^2(z-4)}dz &= 2i\pi\cdot \mathrm{Res}(\frac{z^2+3e^z}{z^2(z-4)},\ z=0) = \\ &= 2i\pi\cdot \mathrm{Res}(\big(3+3z+O(z^2)\big)\cdot\big(-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}z+O(z^2)\big)\cdot\frac{1}{z^2},\ z=0) = \\ &= 2i\pi\cdot \mathrm{Res}(\big(-\frac{3}{16}z-\frac{3}{4}z\big)\cdot\frac{1}{z^2},\ z=0) = -2i\pi(\frac{3}{16}+\frac{12}{16}) = -\frac{15i\pi}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

Les singularités isolées sont: $z=0$, $z=1$, $z=2$.

Pour $z=1$, on calcule

$$\mathrm{Res}(\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2},\ z=1)=0$$

car $\sin(\pi)=0$.

Pour $z=2$, on calcule

$$\mathrm{Res}(\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2},\ z=2) = \mathrm{Res}(\big(\sin(\frac{\pi}{2})-(z-2)+O((z-2)^2)\big)\frac{1}{(z-2)^2},\ z=2) = -1$$

La singularité en $z=0$ est essentielle et est a priori difficile à calculer au moyen de développements limités. Remarquons tout d'abord que lorsque $|z|\to\infty$, on a l'inégalité

$$\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2}\right| \leqslant \frac{C}{|z|^3}$$

où $C>0$ (on notera que lorsque $|z|\geqslant\pi$, $\frac{\pi}{z}$ se trouve à l'intérieur du disque unité fermé, où la fonction $|\sin(w)|$ atteint un maximum). Pour $r>0$, notons $\gamma_r:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ le chemin décrit par la formule $\gamma_r(t)=r\cdot e^{it}$. On calcule au moyen de l'estimée ci-dessus que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r}\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2}dz=0.$$

Par ailleurs le théorème des résidus assure que pour tout $r>2$

$$\int_{\gamma_r}\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2}dz=2i\pi\Big(0+(-1)+\mathrm{Res}(\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2},\ z=0)\Big).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Res}(\frac{\sin(\frac{\pi}{z})}{(z-1)(z-2)^2},\ z=0)=1.$$

Exercice 3.

On calcule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(\phi-\theta)}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}-ire^{i\phi}}d\theta=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-re^{i\phi}}dz=f(re^{i\phi})$$

où la dernière égalité résulte du théorème de Cauchy.

Exercice 4.

Le k-ième coefficient de Fourier de $e^{|x|}$ considérée comme un élément de $L^2([-\pi,\pi])$ est

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}e^{|x|}e^{-ikx}dx &= \int_{-\pi}^{0}e^{-x(1+ik)}dx+\int_0^{\pi}e^{x(1-ik)}dx=\\ &= \frac{e^{\pi}(-1)^k-1}{\pi(k^2+1)}.\end{aligned}$$

On en déduit que pour $k>0$

$$a_k=\frac{2e^{\pi}(-1)^k-2}{\pi(k^2+1)}$$

et que

$$a_0=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}.$$

Exercice 5.

Écrivons $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Les équations de Cauchy-Riemann disent que

$$\partial v/\partial x=-\partial u/\partial y.$$

La fonction $\partial v/\partial x$ est donc un polynôme en x et y. On sait donc que $\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)$ est un polynôme en x. Comme la fonction $v(x,0)$ est une primitive en x de

$\frac{\partial v}{\partial x}(x, 0)$, la fonction $v(x, 0)$ est un polynôme en x. Il existe donc des nombres complexes $c_0, \ldots, c_k$ tels que

$$u(x, 0) + iv(x, 0) = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\sum_{k=0}^{d} c_k x^k$ est la restriction à $\mathbb{R}$ du polynôme complexe $P(z) := \sum_{k=0}^{d} c_k z^k$ et $P(z)$ coïncide avec $f(z)$ sur $\mathbb{R}$. On conclut en appliquant le principe d'unicité.